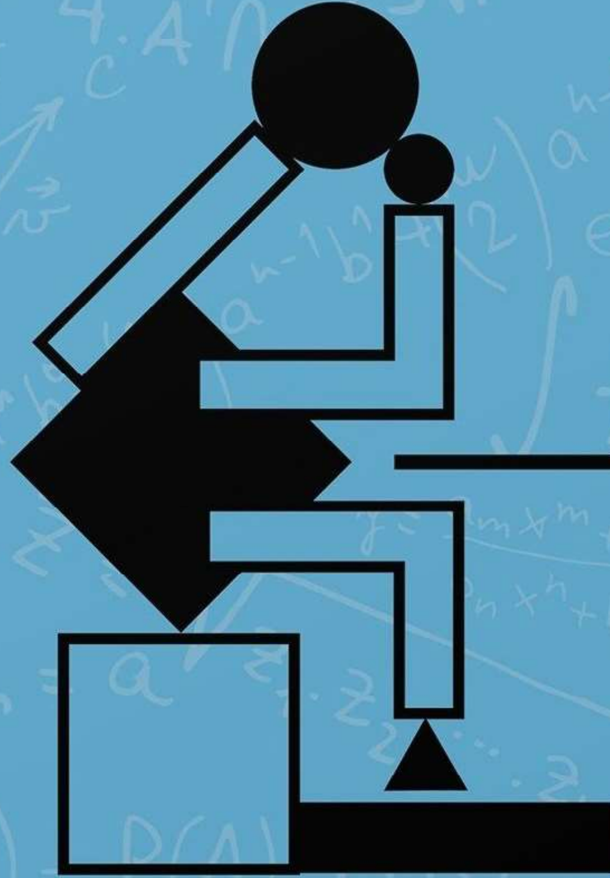
NAİM ÇAĞMAN

MANTIK VE MATEMATİKSEL İSPAT YÖNTEMLERİ





KUTLU YAYINEVİ

AKADEMİK BİLİM YAYINLARI

MANTIK VE MATEMATİKSEL İSPAT YÖNTEMLERİ

NAİM ÇAĞMAN



MANTIK
ve
MATEMATİKSEL İSPAT YÖNTEMLERİ

NAİM ÇAĞMAN

Kutlu Yayınevi
2023 - İstanbul



KUTLU YAYINEVİ

göksel sözcükleriñ yayıncısı

T. C. Kültür ve Turizm Bakanlığı

yayıncı belgesi: 50661

bétik: 1336

Yazar:

Naim ÇAĞMAN

Kapak Tasarımcısı:

Hazar ALABDULLAH

1. baskı: Aralık, 2023 – İstanbul

ISBN: 978-625-6736-30-6

© Tüm hakları saklıdır.

KUTLU YAYINEVİ – *göksel sözcükleriñ yayıncısı*
Kartaltepe Mahallesi, Atakan Sokağı, No: 3/A
Sefaköy, Küçükçekmece – İstanbul
İletişim: 0850 241 76 34, istek@kutluyayinevi.com

Baskı-Cilt: Kitapyurdu Doğrudan Dağıtım (40675)
Yenibosna Merkez Mah. Cemal Ulusoy Cad. No: 43
Bahçelievler – İstanbul

Önsöz

Matematik denince akla ilk olarak teorem ve ispat kavramları gelir. Teoremler ve ispatlar, matematiğin iskeletini oluşturur. Her bilim dalında olduğu gibi matematiğin de kendine has bir ispat dili ve yöntemleri vardır.

On dört bölümden oluşan bu kitabın ilk dört bölümünde, doğru düşünme yöntemi olan mantığın temeli olan önermeler, niceleyiciler, çıkarımlar ve eşitlikler verilmiştir. Beşinci ve altıncı bölümlerde, mantığın bir sonucu olarak teoremlerin ve ispat yöntemlerinin, klasikleşmişlerini de kapsayan, alışılmışın dışında bir sınıflandırması yapılmıştır. Yediden on üçüncü bölümde kadar, her bir ispat türünün, her bir teorem türüne nasıl uygulandığı gösterilmiştir. Son bölüm olan on dördüncü bölümde ise yapılan ispat hatalarını gösteren bazı çarpıcı örnekler verilmiştir.

İspat teknikleri kullanılmadan yapılan ispatlar, doğru olsalar bile, anlaşılmadıklarından yanlış muamelesi görmektedirler. "Doğru ispatladım; ama zayıf aldım" diyen öğrencinin hali bu duruma bir örnektir. İspatlar, evrensel olmalıdır. Yapılan bir ispatın, kişiye göre doğrusu olmaz; sadece mantık kurallarına göre doğrusu olur. Bir ispatın her adımı mantık kurallarına dayanmalıdır. Ayrıca, "ispata nasıl başlanır, nasıl devam edilir, ispat nasıl bitirilir, ispatın doğru olduğuna nasıl karar verilir" bütün bunları bilmek gerekir. İspat ve yöntemlerini iyi anlayan her matematik sevdalısı, iyi bir matematik okur yazarı olur, okuduğu veya yaptığı ispatları anlar, anladığı için zevk alır ve zevk aldığı için matematiğin sihirli dünyasında gezinmekten korkmaz.

Teoremsiz ve ispatsız matematik olmayacağı için bu kitap, işi icabı veya tamamen sevgisinden ötürü matematiğin içinde yer alan herkes için ömür boyu kullanabileceği bir baş ucu kitabı niteliğindedir. Aynı zamanda bu kitap, üniversitelerin özellikle Matematik, Matematik Mühendisliği ve Matematik-Bilgisayar bölümlerinde "Soyut Matematik" veya "Soyut Matematik ve Lojik" ve diğer mühendislik bölümlerinde "Ayrık Matematik" adı altında okutulan dersler için bir kaynak kitabıdır.

Matematiğin evrensel bir dili olduğundan dolayı, kavram ve sembol birliği oluşturmak amacıyla, kitap hazırlanırken ulusal ve uluslararası temel kaynaklardan faydalanılmıştır. Okuyucuların uluslararası kaynaklarda tarama yapabilmelerini kolaylaştırmak için temel kavramların İngilizce karşılıkları dip not olarak verilmiştir. Teoremler, kavram yanılgısına yer vermeyecek şekilde, kısa, öz ve anlaşılır bir şekilde ispatlanmış, öğrenmede kalıcılığı sağlamak için benzer ispatlar okuyucuya bırakılmıştır. Teori ve uygulamayı bütünsel olarak ele almak amacıyla ilgili tanım ve teoremlerin ardından çoğunlukla günlük hayatla ilişkili, herkesin kendinden bir parça bulabileceği, okuyucunun dikkatini canlı tutacak, onu konunun içine çekecek, çok çeşitli örnek ve alıştırmalara yer verilmiştir.

Kitabın sonraki baskılarını geliştirmek için yapacakları öneri ve eleştirilerini *naim.cagman@gop.edu.tr* ya da *ncagman@yahoo.com* e-postalarından birine gönderecek meslektaşlarıma şimdiden çok teşekkür ederim.

Bu kitap hazırlanırken, her aşamasında defalarca okuyarak, yapıcı eleştirileri ve ufuk açıcı önerileriyle kitabın gelişmesinde katkıda bulunan Prof. Dr. Aslıhan Sezgin'e; dikkatlice okuyarak yardımlarını esirgemeyen meslektaşlarımdan Prof. Dr. İrfan Deli, Prof. Dr. Faruk Karaaslan, Doç. Dr. Güzide Şenel, Dr. Öğr. Üyesi Filiz Çıtak, Dr. Serkan Karataş başta olmak üzere emeği geçen bütün dostlarıma ayrı ayrı teşekkür ederim. Kapak tasarımı için bilgisayar desteği veren Öğr. Gör. Hadi Esmeray'a ayrıca teşekkür ederim.

Son olarak, kitabın yazımı sırasında gösterdiği sabır ve verdiği manevi destekten dolayı eşim Kudret'e şükranlarını sunarım.

Mantık ve Matematiksel İspat Yöntemleri'nin tüm matematik sevenlere yararlı olması dileğiyle ... *5 Aralık 2023*

Prof. Dr. Naim Çağman[1]

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, Tokat

[1]Yazarın öz geçmişi kitabın sonunda verilmiştir.

İçindekiler

Bölüm 1

Önermeler Mantığı

Güçe güçü yeten, tek güç mantıktır.
Naim Çağman

Günlük hayatımızda; "Mantıklı ol!", "Bu yaptığın mantıksız." ve "Bu işin mantığı ne?" gibi içinde mantık geçen ifadeler kullanırız. Bu açıdan bakarsak; mantığa, doğru düşünme yöntemi diyebiliriz. Daha bilimsel olarak tanımlarsak; mantık, doğru düşünmenin kurallarını belirleyen ve araştıran matematiğin bir dalıdır.

Köken olarak mantık, Arapça "söz", "konuşma" anlamına gelen "nutuk" sözcüğünden türetilmiştir. Türkçe'de mantık yerine kullanılan "lojik" kelimesi batı dillerindeki karşılığı olan "logic" kelimesinin Türkçe okunuşundan gelir. Logic; akıl, düşünme, yasa, ilke anlamına gelen Yunanca "logos" kelimesinden gelmektedir.

Mantık, ilk olarak Aristo[1] (M.Ö. 384-322) tarafından sistemli hale getirilmiştir. Bu nedenle, 19. yüzyıla kadar egemenliğini sürdüren bu mantığa **Aristo mantığı** ya da **klasik mantık** denir. Aristo mantığı, konuşma dilinden seçilen önermelerin manasına dayandığından matematiksel olarak fazla bir ilerleme gösterememiştir. Bu problemi aşmak için De Morgan (1806-1871), Boole (1815-1865), Russell (1872-1970) ve Frege (1848-1925) gibi mantıkçılar önermeleri manalarından bağımsız sembolleştirmek için çalışmışlardır.

[1] Aristoteles

Russell [28], mantık ve matematik arasındaki ilişki için söyle demiştir: "*Matematik ve mantık, tarihin penceresinden baktığımızda, birbirinden tamamen ayrı disiplinlerden olmuştur. Matematik bilimle; mantık ise Yunanca ile bağdaştırılmıştır. Ama son zamanlarda her ikisi de gelişmiştir; mantık daha matematikselleşmiş ve matematik ise daha mantıksal bir hal almıştır. Sonuçta, ikisi arasına bir çizgi çekmek artık tamamen imkansız hale gelmiştir; hatta ikisi bir olmuştur. Birbirlerinden ancak bir erkeğin gençliği ve yetişkinliği kadar farklıdırlar. Mantık matematiğin gençliği; matematik ise mantığın gelişmiş halidir*".

Önermelerin sözel ifadelerinin yerine, ifadelerinden bağımsız sembollerin kullanılmasıyla meydana gelen mantığa **sembolik mantık**[2] denir. Matematiksel çalışmaların önünü açan "sembolik mantık" yerine, bazı kaynaklarda "**matematiksel mantık**"[3], "**matematik lojik**" veya "**modern mantık**" ifadeleri de kullanılır. Cümlelerden bağımsız olan mantık, artık konuşmaların dışına çıkarak sistemli bir şekilde matematik, elektrik, elektronik ve bilgisayar programcılarının kullandığı bir konu haline gelmiştir.

Buradan, sembolik mantığın amacının verilen önermeleri sembollere dönüştürmek olduğu anlaşılmasın. Tam tersine, sembolik mantığın amacı; sembollerle elde edilen teoremlerdeki semboller yerine, çalışılan alana göre istenilen önermenin ifadesini koyarak, doğru kararlar vermede yardımcı olmaktır.

Eğitimli veya eğitimsiz insanlar bilerek ya da bilmeyerek mantığı kullanmaktadır. Doğru düşünmenin kurallarını koyan mantık, bütün bilimlerin mayasında vardır. Mantığı matematikten, matematiği bilim dallarından çekip çıkarsan, bilim dünyası çekilmez olur.

Sembolik mantığa giriş niteliğinde olan bu bölümde, matematiksel ispat yöntemlerinde kullanılacak konular verilecektir. Bu bölüm hazırlanırken, sembolik mantıkta öne çıkan ulusal ve uluslararası [1, 8, 14, 15, 21, 23, 25, 33] kaynaklarından kısmen yararlanılmıştır.

---

[2] symbolic logic

[3] matematical logic

Bölüm 3

Mantıksal Çıkarımlar

İnsanlara yapılacak en büyük iyilik;
onlara akıllarını kullanmayı öğretmektir.
Jean B. Moliere

Mantığın temel konularından biri olan çıkarım, en genel anlamıyla var olan bilgilerden mantık kurallarıyla yeni bilgiler üretmektir. Her insan aklını kullanarak düşünür, kararlarını kendi düşüncesine göre verir. Acaba aldığımız kararlar doğru mudur? Bunun doğru veya yanlış olmasına kim ve nasıl karar verecek? Bu bölümde, bu soruların cevaplarını göreceğiz.

Herkes, etrafımızda olanları kendi aklıyla değerlendirir. Ne olursa olsun, herkesin aklı kendine uygunsa doğru, değilse yanlıştır. Anlaşmazlıkların ana sebebi, kendi aklımızın en doğru olduğunu sayarak karşımızdakini kendimiz gibi düşünmeye zorlamaktan kaynaklanır. Çünkü, en iyi akıl, herkesin kendi aklıdır. Dünyada, aklını beğenmeyen, aklından şikayetçi olan hiç kimseyi göremeyiz. Bu gerçeğe vurgu yapmak için atasözümüzde; "Akılları pazara çıkarmışlar, herkes yine kendi aklını beğenmiş almış." derken, Fars alimi Sadi Şirazi (1210-1292); "Akıl yeryüzünden kalksa bile hiç kimse akılsız olduğunu kabul etmez" demiştir.

Mantığın kurucusu Aristo[1] (M.Ö. 384-322)'dan günümüze kadar

[1] Aristoteles

mantıkla uğraşan bilim insanlarının en önemli amaçlarından biri çıkarım mantığını oluşturmak olmuştur. Alman matematikçi Leibniz (1646-1716), bir düşüncenin doğru olup olmadığını otomatik olarak belirtmeye yarayan bir sistem geliştirmeye çalışarak düşünen makineler yapmayı amaçlamıştır. Leibniz'in fikri, uygulamada sonuçsuz kalsa da matematiğe yeni bir alan açmıştır.

Doğru düşünme metodu olan çıkarımın, geniş kullanım alanları vardır. Mantıksal çıkarım, mevcut bilgilere dayanarak yeni bilgilerin çıkarılması veya var olan bilgilerin doğrulanması için kullanılır. Çıkarım kurallarını istenilen alana uygulayabilmek için kullanılan önermelerin yerine çalışılan alanla ilgili uygun önermeler koymak yeterlidir. Bu nedenle mantık, diğer alanların anahtar olarak kullandığı, sembollerle kurulmuş mükemmel çalışan bir sistemdir.

Bu bölüm hazırlanırken, çıkarım konusunu işleyen ulusal ve uluslararası [3, 9, 19, 29, 33] kaynaklarından kısmen yararlanılmıştır.

3.1 Çıkarımlar ve Türleri

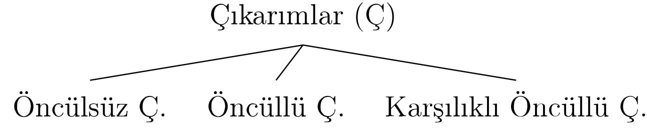
Burada, sembolik mantığın bir uygulama alanı olan çıkarımların tanımını ve türlerini göreceğiz.

Tanım 3.1. Doğru olan ya da doğru olduğu kabul edilen önermelerden mantık kurallarına dayanarak yeni bir önerme elde etme işlemine **çıkarım**[2] denir. Bir çıkarımda, doğru olan ya da doğru olduğu kabul edilen önermelere **öncül**[3] ve elde edilen yeni önermeye **sonuç**[4] denir.

"*Öncül*" yerine bazen; "koşul", "şart", "kabul", "varsayım", "sebep", "gerekçe", "neden", "verilen" gibi ifadeler kullanılırken; "*sonuç*" yerine ise "netice", "istenen", "çıkan", "elde edilen", "bulunan" gibi ifadeler kullanılır.

---

[2] inference
[3] premise
[4] conclusion



Şekil 3.1: Çıkarımlar

Öncüllerine göre çıkarımlar; Tablo 3.1'de görüldüğü gibi öncülsüz çıkarımlar, öncüllü çıkarımlar ve karşılıklı öncüllü çıkarımlar olmak üzere üçe ayrılır.

3.1.1 Öncülsüz Çıkarımlar

Burada, öncül gerektirmeyen çıkarımları vereceğiz.

Tanım 3.2. Hiç bir öncüle gerek duymayan sonuçlara **öncülsüz çıkarım** denir. Bu durumda, mutlak doğrular ve doğru kabul edilen önermeler birer öncülsüz çıkarımdır. Bir p öncülsüz çıkarımının formülü aşağıdaki gibi yazılır.

$$\vdash p$$

Burada, öncülün olmadığını göstermek için sonuçtan önceki "$\vdash$" işaretine **çıkarım sembolü** denir.

Örnek 3.1. "Armudun sapı üzümün çöpü vardır." çıkarımı bir öncülsüz çıkarımdır. Eğer "Armudun sapı vardır.", "Üzümün çöpü vardır." önermeleri sırasıyla p ve q ile gösterilse çıkarımın formülü aşağıdaki gibi yazılır.

$$\vdash p \wedge q$$

Alıştırma 3.1. Aşağıdaki çıkarımların, formüllerini yazınız.

a) 2+2=2

b) 2 asal sayıdır.

c) 1 tek, 2 çift sayıdır.

d) Su, ılık veya soğuk içilir.

3.1.2 Öncüllü Çıkarımlar

Burada, öncüllerden sonucun üretildiği çıkarımları vereceğiz.

Tanım 3.3. En az bir öncülü olan çıkarımlara, **öncüllü çıkarım** denir. Bir p öncülünden mantık kurallarıyla q soncunu gerektiren bir öncüllü çıkarım

$$p \vdash q$$

şeklinde yazılır. Öncüllü çıkarımlarda, öncüller ile sonucu ayırmak için kullanılan "$\vdash$" çıkarım sembolü; genellikle "**o halde**", "**ise**", "**buna göre**", "**bu durumda**", "**buradan**", "**o zaman**", "**sonuç olarak**" diye okunur.

Öncüllü çıkarımlarda, öncül veya sonuç birden fazla olabilir. Bu durumda, m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere, öncülleri p_1, p_2, ..., p_m ve sonuçları $q_1, q_2, ..., q_n$ olan bir öncüllü çıkarımın formülü aşağıdaki gibi yazılır.

$$p_1, p_2, ..., p_m \vdash q_1, q_2, ..., q_n$$

Not 3.1. Çıkarımlarda verilen önermeler arasındaki virgüller "$\wedge$" anlamına gelmektedir. Yani,

$$p_1, p_2, ..., p_m \vdash q_1, q_2, ..., q_n$$

çıkarımı, gerektiğinde aşağıdaki yazılabilir.

$$p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_m \vdash q_1 \wedge q_2 \wedge ... \wedge q_n$$

Örnek 3.2. "Kar yağıyorsa hava soğuk olur. Kar yağmıyor. O halde hava soğuk değildir." çıkarımı bir öncüllü çıkarımdır. Burada, "Kar yağıyor." ve "Hava soğuktur." önermeleri sırasıyla p ve q ile gösterilirse öncüllü çıkarımın formülü aşağıdaki gibi yazılır.

$$p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg q$$

Örnek 3.3. "$x_1 = 1, x_2 = 2, , ..., x_9 = 9$ ise $x_1 + x_2 + ... + x_9 = 45$ ve $x_1 x_2 ... x_9 = 9!$ olur." çıkarımı bir öncüllü çıkarımdır. Burada, $1 \leqslant i \leqslant 9$ için $x_i = i$ önermesi p_i ve sonuçtaki önermeleri q_1 ve g_2 ile gösterirse öncüllü çıkarımın formülü aşağıdaki gibi yazılır.

$$p_1, p_2, ..., p_q \vdash q_1, q_2$$

Alıştırma 3.2. Aşağıdaki öncüllü çıkarımların formüllerini yazınız.

a) Yağmur yağıyor. O halde, yerler ıslaktır.

b) Ali, çalıştı ve sınava girdi. Bu durumda, Ali dersi geçti veya kaldı.

c) Param varsa taksiyle, yoksa yürüyerek işe gidiyorum. Sonuçta her iki durumda da işe gidiyorum.

d) $x = (-1)^y$ ve $y \in \mathbb{Z}$ olun. Buradan, $x = -1$ veya $x = 1$ çıkar.

e) $x = 2$ ve $y = 2$ ise $x + y = 4$, $xy = 4$ ve $x^y = 4$ olur.

Not 3.2. Bileşik önermelerde kullanılan "$\rightarrow$" ise bağlacı ile öncüllü çıkarımlarda kullanılan "$\vdash$" gerektirme sembolü arasında farklar vardır; "$\rightarrow$" sembolü, herhangi iki önermeyi bağlayarak yeni bir önerme oluşturan bağlaçken; "$\vdash$" sembolü, mantık kurallarına göre öncüllerden sonucun elde edildiğini gösteren bir semboldür.

3.1.3 Karşılıklı Öncüllü Çıkarımlar

Burada, öncül ve sonucun birbirini gerektiren karşılıklı öncüllü çıkarımları vereceğiz.

Tanım 3.4. Öncülün ve sonucun birbirini gerektiren çıkarımlara, **karşılıklı öncüllü çıkarım** denir. Uzun başlıklarda, "Karşılıklı Öncüllü Çıkarımlar" yerine kısaca "**KÖ-Çıkarımlar**" yazılır. p ve q bir karşılıklı öncüllü çıkarımın birbirini gerektiren iki önermesi ise karşılıklı öncüllü çıkarımın formülü, $p \vdash q$ ve $q \vdash p$ öncüllü çıkarımlarının birlikte yazılmış hali olarak

$$p \dashv\vdash q$$

şeklinde yazılır. Karşılıklı koşullu çıkarımlarda, önermeler arasındaki "$\dashv\vdash$" işaretine, **karşılıklı çıkarım sembolü** denir ve genellikle "**ancak ve ancak**", "**gerek yeter koşul**" veya "**gerek yeter şart**" diye okunur.

Örnek 3.4. "Kar yağması için gerek ve yeter koşul mevsimin kış olmasıdır." çıkarımı bir karşılıklı öncüllü çıkarımdır. Burada, eğer "Kar yağıyor." ve "Mevsim kıştır." önermeleri sırasıyla p ve q ile gösterilirse çıkarımın formülü aşağıdaki gibi olur.

$$p \dashv\vdash q$$

Örnek 3.5. "$x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$, $y = 2^x$ olması için gerek yeter öncül $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$, $x = log_2 y$ olmasıdır." bir karşılıklı öncüllü çıkarımdır. Burada, "$x \in \mathbb{R}$", "$y \in \mathbb{R}^+$", "$y = 2^x$" ve "$x = log_2 y$" önermeleri sırasıyla p, q, r ve s ile gösterilirse çıkarımın formülü aşağıdaki gibi yazılır.

$$p, q, r \dashv\vdash p, q, s$$

Alıştırma 3.3. Aşağıdaki karşılıklı öncüllü çıkarımların formüllerini yazınız.

a) Yağmur yağmaz değil olduğunda ancak ve ancak yağmur yağar.

b) A, B'nin annesi olması için gerek yeter öncül B'nin A'yı doğurması veya evlat edinmesidir.

c) A ve B kümeleri için $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

d) $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \leqslant y$ olması için gerek ve yeter koşul $y = x + k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ var olmasıdır.

Not 3.3. Bileşik önermelerde kullanılan "$\leftrightarrow$" ancak ve anacak bağlacı ile karşılıklı öncüllü çıkarımlarda kullanılan "$\dashv\vdash$" karşılıklı öncüllü çıkarım sembolü arasında farklar vardır; "$\leftrightarrow$" sembolü, herhangi iki önermeyi bağlayarak yeni bir önerme oluşturan bağlaçken; "$\dashv\vdash$" sembolü, öncülden sonucun ve sonuçtan da öncülün elde edildiğini gösteren bir semboldür.

3.2 Çıkarımların Geçerlilik İspatı

Herkesin kendi yürüttüğü akıl kendine göre doğru olduğu için genellikle günlük konuşmalarımızda yaptığımız çıkarımların doğruluğunu kontrol etmeyi düşünmeyiz, düşünsek bile nasıl yapacağımızı bilemeyiz. Burada, sembolik mantığın en önemli görevlerinden birinin çıkarımların geçerli olup olmadığını belirlemek olduğunu göreceğiz.

Tanım 3.5. Öncüllerinin doğru kabulüne bağlı olarak, mantık kurallarına göre sonucu doğru olmak zorunda kalan çıkarıma **geçerli**[5]; aksi durumda **geçersiz**[6] denir.

Mantık, bir çıkarımda, öncüllerin ve sonucun doğru olup olmadığıyla ilgilenmez; doğru kabul ettiği öncüllerden zorunlu olarak sonucun çıkıp çıkmayacağıyla ilgilenir. Bu nedenle, bir çıkarımın geçerli olması, öncüllerinin ve sonucunun doğruluk değerine bağlı değildir. Bir çıkarımın geçerli olması için sonucun doğru olması gerekmez; yanlış bile olsa, doğru kabul edilen öncüllerden sonuç, mantık kurallarıyla çıkıyorsa çıkarım geçerlidir.

Örnek 3.6. "Ay'da oksijen vardır. Oksijen olan yerde hayat vardır. O halde, Ay'da hayat vardır." çıkarımına bakalım. Burada, öncülleri dikkate almazsak "Ay'da hayat vardır." sonucu yanlıştır. Fakat, öncülleri doğru kabul edersek, bu kabullerimiz "Ay'da hayat vardır." sonucunu doğru kabul etmek zorunda bıraktığından bu çıkarım geçerlidir.

Örnek 3.7. "3 bir çift tamsayı ise 5 de çifttir." çıkarımına bakalım. Burada, 3 sayısını çift kabul edersek $3 = 2n$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır.

$$5 = 3 + 2 = 2n + 2 = 2(n + 1) = 2m$$

olacak şekilde bir m tamsayısı vardır. Burada, doğru kabul edilen öncülden zorunlu olarak 5 çift çıktığı için bu çıkarım geçerlidir.

[5]velid
[6]invalid

Alıştırma 3.4. Aşağıdaki çıkarımlar geçerli midir? Araştırınız.

a) Bir yerde yangın varsa orada oksijen vardır. Burada yangın yok. O halde burada oksijen yoktur.

b) Su sıcak veya soğuk içilir. Su soğuk içilirse zararlıdır. Su sıcak içilirse de zararlıdır. O halde su zararlıdır.

c) A ve B'nin babası D'dir. A ve C'nin annesi E'dir. B'nin annesi E değildir. O halde, A ailenin öz çocuğudur.

Alıştırma 3.4'te verilen çıkarımların geçerli ya da geçersiz olduklarına karar verdiniz. Şimdi esas soru; verilen kararların hangilerinin doğru olduğuna kim ve nasıl karar verecek? Burada bu sorunun cevabını tablo kullanarak ve teorik olmak üzere iki farklı yolla vereceğiz.

3.2.1 Çıkarımların Doğruluk Tablosuyla İspatı

Burada, mümkün olduğunca "doğruluk tablosuna" kısaca "tablo" diyeceğiz. Tabloyla, her çıkarım türünün geçerlilik ispatının nasıl yapılacağını göreceğiz. Bir tablo, öncüllerden bir sonuç çıkarmaz; sadece öncüllerden çıkan sonucun çıkıp çıkamayacağını söyler. Diğer çıkarım türlerinin geçerlilik ispatlarında kullanacağı için önce öncülsüz çıkarımların doğruluk tablosuyla geçerlilik ispatının nasıl yapılacağını vereceğiz.

3.2.1.1 Öncülsüz Çıkarımların Tabloyla İspatı

Diğer çıkarım türlerinin geçerlilik ispatlarında kullanılacağı için öncelikle öncülsüz çıkarımların doğruluk tablosuyla geçerlilik ispatının nasıl yapılacağını vereceğiz.

Teorem 3.1. Bir öncülsüz çıkarım geçerlidir ancak ve ancak öncülsüz çıkarım bir mutlak doğrudur.

İspat. Öncülsüz çıkarım geçerli ise sonuç doğrudur. Öncülsüz çıkarımın öncülü olmadığı içim sonuç kendisidir. Her doğru sonuç bir

mutlak doğru olduğun için geçerli öncülsüz çıkarım da bir mutlak doğrudur.

Tersine, eğer öncülsüz çıkarım bir mutlak doğru ise sonuç doğrudur. Sonuç doğru ise öncülsüz çıkarım geçerlidir. □

Burada, Teorem 3.1'in bir uygulaması olarak, bir öncülsüz çıkarımın geçerlilik ispatını yapmak için öncülsüz çıkarımın mutlak doğru olduğu tabloyla gösterilir.

Örnek 3.8. Her p ve q önermeleri için $\vdash (p \to q) \vee \neg q$ öncülsüz çıkarımın geçerli olduğunu doğruluk tablosuyla gösterelim.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \to q) \vee \neg q$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

doğruluk tablosuna göre $(p \to q) \vee \neg q$ önermesi bir mutlak doğru olduğu için verilen öncülsüz çıkarım geçerlidir.

Alıştırma 3.5. Her p ve q önermesi için aşağıdaki öncülsüz çıkarımları geçerli midir? Doğruluk tabloyla ispatlayınız.

a) $\vdash p \to (q \to p)$ b) $\vdash (p \wedge q) \to q$ c) $\vdash [(p \to q) \wedge q] \to p$

3.2.1.2 Öncüllü Çıkarımların Tabloyla İspatı

Burada, öncüllü çıkarımların doğruluk tablosu ile geçerlilik ispatının nasıl yapıldığını farklı yollarını vereceğiz.

Teorem 3.2. Doğruluk tablosunda öncüllerin doğru olduğu her satırda sonuç da doğru ise öncüllü çıkarım geçerli; diğer durumlarda geçersizdir.

İspat. Öncüllü çıkarımlarda öncüller doğru kabul edilir. Öncüllü çıkarımın doğruluk tablosunda öncüllerin doğru olduğu satırlarda sonuç da doğru çıkarsa çıkarım geçerli olur. □

Örnek 3.9. Alıştırma 3.4-a)'da verilen çıkarımın geçerlilik ispatını tabloyla yapalım. Burada, "Yangın vardır." ve "Oksijen vardır." önermeleri sırasıyla p ve q sembolleriyle gösterilirse çıkarımın formülü,

$$p \to q, \neg p \vdash \neg q$$

şeklinde elde edilir. Geçerlilik ispatı için çıkarımın tablosunu yapalım:

		Öncül	**Sonuç**	Öncül
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Tablonun 3. satırında $p \to q$ ve $\neg p$ doğru iken $\neg q$ sonucu yanlış olduğundan çıkarım geçersizdir. 4. satırda sonucun doğru olması çıkarımın özel durumlarda doğru olabileceğini gösterir. Özel durumlara bakarak çıkarım geçerli diyemeyiz.

Örnek 3.10. Alıştırma 3.4-b)'de verilen çıkarımın geçerlilik ispatını tabloyla yapalım. Eğer "Su sıcak içilir", "Su soğuk içilir." ve "Su zararlıdır." önermeleri sırasıyla p, q ve r dersek, çıkarımın formülü

$$p \vee q, p \to r, q \to r \vdash r$$

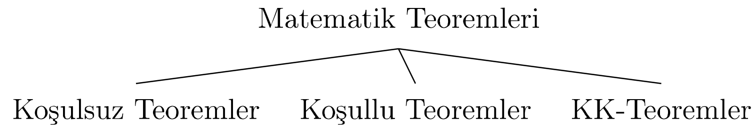
şeklinde elde edilir. Şimdi, çıkarımın tablosunu yapalım;

		Sonuç	Öncül	Öncül	Öncül
p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$q \to r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

5.3 Teoremlerin Sınıflandırılması

Bölüm 1.5'te doğruluğu ispatlanmış önermelere teorem denildiğini biliyoruz. Buna göre, **matematik teoremi**, matematik önermeleriyle yazılmış doğru önermelerdir. Bütün matematik teoremlerini bir kalıba sokmak imkansız olduğundan burada, çıkarımların türlerine dayanarak matematik teoremlerinin bir sınıflandırmasını yapacağız.

Matematik teoremlerinin bir sınıflandırılması yapılırken, Bölüm 3.1'de verilen geçerli çıkarımların; öncülsüz, öncüllü ve karşılıklı öncüllü olarak üçe ayrılışı kullanılarak Şekil 5.1'deki gibi matematik teoremleri, koşullu, koşulsuz ve karşılıklı koşullu (KK) olarak üçe ayrılır.



Şekil 5.1: Matematik Teorem Türleri

Geçerli çıkarımlardan matematik teoremlerini elde ederken, geçerli çıkarımlardaki önerme sembolleri yerine matematik önermeleri yazılır. Her bilim dalının kendine has sembolleri ve önerme ifadeleri vardır. Tablo 5.2'de görüldüğü gibi geçerli çıkarımları matematik teoremlerine dönüştürürken, çıkarımlardaki "öncülsüz", "öncüllü" ve "karşılılı öncüllü" terimleri yerine sırasıyla matematik teoremlerinde "koşulsuz", "koşullu" ve "karşılıklı koşullu" terimi kullanılırken; çıkarımlardaki "$\vdash$" ve "$\dashv\vdash$" sembolleri yerine sırasıyla matematik teoremlerinde "$\Rightarrow$" ve "$\Leftrightarrow$" sembolleri kullanılır.

Geçerli Çıkarımlar	**Matematik Teoremleri**
Öncülsüz Çıkarım $\vdash q$	Koşulsuz Teorem q
Öncüllü Çıkarım $p \vdash q$	Koşullu Teorem $p \Rightarrow q$
Karşılıklı Öncüllü Çıkarım $p \dashv\vdash q$	Karşılıklı Koşullu Teorem $p \Leftrightarrow q$

Tablo 5.2: Çıkarımlar ve teoremlerin karşılaştırılması.

Geçerli çıkarımlar, matematik teoremlerine dönüştüğü için çıkarımlarda geçerli olan bütün özellikler teoremlerde de geçerlidir ve kullanılacaktır.

Not 5.2. Bundan sonra mümkün olduğunca, "matematik önermesi" yerine "önerme" ve "matematik teoremi" yerine "teorem" denilecek.

5.3.1 Koşulsuz Teoremler

Burada, geçerli öncülsüz çıkarımlardan elde edilen koşulsuz teoremler gösterilecek olup, öncülsüz çıkarımlar için Bölüm 3.1.1'e bakınız.

Tanım 5.5. Geçerli öncülsüz çıkarımlarda önerme formülleri yerine matematik önermeleri yazarak elde edilen mutlak doğru önermelere **koşulsuz teorem** denir.

Örnek 5.7. Aşağıdakiler birer koşulsuz matematik teoremidir.

1) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \vee y < x$

2) $\exists x, y \in \mathbb{Z}, x + y = xy$

3) $\forall A \in U, \varnothing \subseteq A$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)|(x^2-1)$

Alıştırma 5.7. Dört tane koşulsuz matematik teoremi yazınız.

Alıştırma 5.8. Aşağıdaki öncülsüz çıkarımlarda p ve q önerme formülleri yerine uygun matematik önermeleri yazarak koşulsuz teoremler elde ediniz.

a) $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$ b) $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$ c) $\vdash (p \wedge q) \rightarrow q$

Not 5.3. Matematiksel ifadelerde bir karışıklığa sebep olmayacaksa genellikle evrensel niceleyiciler yazılmaz. Yani, bir A kümesi üzerinde tanımlı $\forall x \in A, p(x)$ evrensel önermesinde $x \in A$ olduğu belli ise $\forall x, p(x)$ veya daha kısa olarak $p(x)$ şeklinde yazılır.

5.3.2 Koşullu Teoremler

Burada, geçerli öncüllü çıkarımlardan elde edilen koşullu teoremler verilecek olup, öncüllü çıkarımlar için Bölüm 3.1.2'ye bakınız.

Tanım 5.6. Geçerli öncüllü çıkarımlarda önerme formülleri yerine matematik önermeleri yazarak elde edilen önermelere **koşullu teorem** denir. Bir $p \vdash q$ geçerli öncüllü çıkarımından elde edilen koşullu teorem

$$p \Rightarrow q$$

şeklinde yazılır. Burada, p önermesine **koşul** ve q önermesine de **sonuç** denir. Koşul ile sonucu ayıran "$\Rightarrow$" sembolüne **gerektirme bağıntısı** veya kısaca **gerektirme** denir. $p \Rightarrow q$ koşullu teoremi; "**p, q'yu gerektirir**", "**p ise q**" veya "**q için p yeter koşuldur**" diye okunur.

Örnek 5.8. Aşağıdakiler birer koşullu teoremdir.

1) x tek ise x^2 tektir.

2) $\exists x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in [0, 1]$

3) $x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y$

4) $A = \varnothing, B \subseteq A \Rightarrow B = \varnothing$

Bölüm 6

İspatlara Giriş

Bir matematikçi sanmaz fakat bilir,
inandırmaya çalışmaz çünkü ispat eder.
Henri Poincare

Bir önermenin doğruluk değerinin gösterilmesi işlemine ispat denildiğini Bölüm 1.5'ten biliyoruz. Matematik denildiğinde akla ilk gelen kavramlardan biri teoremse diğeri ispattır. Matematikte teorem ve ispat kavramı ikiz kardeş gibi ayrılmaz ikilidir. Bir yerde teorem yazıyorsa hemen altında ispatı vardır veya istenir.

Bir önermeye teorem denilmişse, bu önermenin doğruluğu ispatlanmış demektir. O halde, teoremlerin ispatı neden yapılır veya istenir? Burada amaç, teorem olmuş önermelerin önceden yapılmış ispatlarının nasıl yapıldığını göstermektir. Yapılmış ispatları bilmek, yeni yapılacak ispatlara yol gösterecektir.

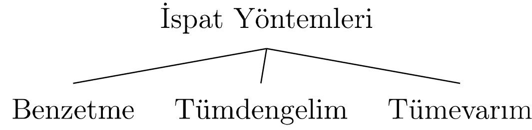
Matematiğin kendine has ispat yöntemleri vardır. Burada, ispat yöntemlerinin hepsini vermemiz imkansız olduğundan; çok sık kullanılan ispat yöntemleri ve bunların bir sınıflandırmasını yapacağız. Bundan sonra verilecek matematiksel ispat yöntemleri konuları hazırlanırken, ulusal ve uluslararası [2, 4, 6, 8, 13, 15, 16, 20, 32] kaynaklarında kısmen yararlanılmıştır.

6.1 İspatların Sınıflandırılması

Her bilim dalının kendine has **ispat yöntemleri**[1] ve bir ispat dili vardır. Laboratuvarda deney yapmak, doğada gözlem yapmak, topluluklara anket uygulamak ve bilgisayar programları kullanmak bu yöntemlerden bazılarıdır. Matematikte teoremlerin de kendine has ispat yöntemleri ve bu yöntemlerin evrensel bir dili vardır. Yapılan bir ispata bana göre doğru diyemezsiniz, mantık kurallarına dayanmadan yapılan ispatlar doğru bile olsa anlaşılmayacaktır.

Bir teorem ve ispat okur yazarı olmak için bir ispata nasıl başlanır, nasıl devam edilir, nasıl bitirilir ve doğru olduğuna nasıl karar verilir bilmek gerekir. Anlaşılır bir ispat yapabilmek veya yapılmış ispatı anlayabilmek için matematikçilerin kullandıkları ispat dilini ve klasikleşmiş ispat yöntemlerini öğrenmek elzemdir.

Teoremlerde olduğu gibi ispat yöntemlerinin de hepsini bir kalıba sokmak imkansız olsa da; burada ispat yöntemlerine giriş mahiyetinde bazı kalıplaşmış ispat yöntemlerinin, ifade edilişini ve bir sınıflandırmasını yapacağız.



Şekil 6.1: İspat Yöntemleri

İspat yöntemleri, Şekil 6.1'de görüldüğü gibi genelde benzetme (analoji), tümdengelim ve tümevarım olmak üzere kabaca üç ana başlıkta incelenir.

6.1.1 Benzetme

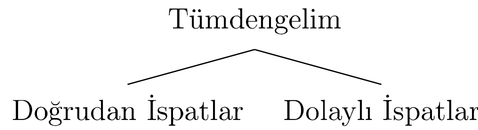
Benzetme[2], benzerliklere dayanarak bilinenler hakkındaki hükümlerin, bilinmeyenlerde de geçerli olabileceğine dayalı bir akıl yürütme

[1] methods of proof
[2] analogy

biçimidir. Örneğin, Can sahil kentinde oturuyor ve yüzme biliyor. Sırf sahil kentinde oturduğu için Canan'nın da yüzme bildiği hükmünü çıkarmak bir benzetmedir. Benzetmeyle elde edilen bilgiler tahmine dayalı olduğu için doğruluk değerleri olasılıklıdır. Benzetmelerde, öncüllerden sonuç çıkar ama zorunlu değildir. Kesinlik isteyen matematik alanında kullanılan bir akıl yürütme yöntemi olmadığından burada benzetme konusuna girmeyeceğiz.

6.1.2 Tümdengelim

Matematikçilerin en önemli özelliklerinden veya görevlerinden biri her ne çalışıyorlarsa onun bir genellemesini yapmak, yani formülünü çıkarmaktır. Burada amaç, genelleştirilen bilgilerin gerektiğinde istenilen özel durumlar için de kullanabilmektir. Bu şekilde, bilgileri genelleştirerek elde edilen formülleri kullanarak özel problemleri çözme yöntemine **tümdengelim**[3] denir. Kısaca tümdengelim, genel ilkelerden özel sonuçlar çıkarma işlemidir.



Şekil 6.2: Tümdengelim İspat Yöntemleri

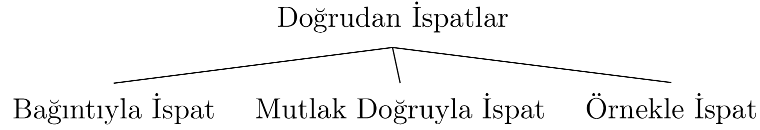
Tümdengelim ispat yöntemlerini Şekil 6.2'de görüldüğü gibi doğrudan ispat ve dolaylı ispat olmak üzere ikiye ayırdıktan sonra her birini Şekil 6.3 ve 6.4'te verildiği gibi dallara ayırarak işleyeceğiz.

6.1.2.1 Doğrudan İspatlar

Tanım 6.1. Bir önermenin verilen ifadesiyle; aksiyom, tanım ve teoremleri kullanarak mantıksal adımlarla doğru ya da yanlış olduğunun gösterilmesi yöntemine **doğrudan ispat**[4] denir. Bu tanıma

[3] proof by deduction
[4] direct proof

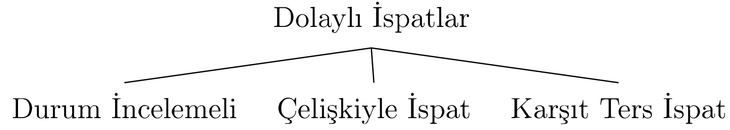
göre, doğrudan ispat yöntemleri, Şekil 6.3'te verildiği gibi üçe ayrılır. Bunların her birini ileride ayrı bir bölüm olarak işleyeceğiz.



Şekil 6.3: Doğrudan ispat yöntemleri

6.1.2.2 Dolaylı İspatlar

Tanım 6.2. Bir önermeyi doğrudan ispat etmek yerine dolaylı olarak; parçalayarak veya eşdeğerine dönüştürerek aksiyom, tanım ve teoremler yardımıyla mantıksal adımlarla doğru ya da yanlış olduğunun gösterilmesi yöntemine **dolaylı ispat**[5] denir. Bu tanıma göre dolaylı ispat yöntemleri, Şekil 6.4'te verildiği gibi üçe ayrılır. Bunların her birini ileride ayrı bir bölüm olarak göreceğiz.



Şekil 6.4: Dolaylı ispat yöntemleri

6.1.3 Tümevarım

Tümevarım[6] ispat yöntemini, detaylı olarak Bölüm 13'te vereceğiz.

—○— [7]

[5] indirect proof
[6] mathematical induction
[7] *Daha iyisi için önerinizi yazara (**naim.cagman@gop.edu.tr**) gönderiniz.*

Bölüm 8

MD ile Doğrudan İspatlar

İyi biten her şey iyidir.
Shakespeare

MD, sadece bu başlıklarda "mutlak doğru" için kullanılan bir kısaltmadır. Mutlak doğruyla doğrudan ispat, koşulsuz teoremlere uygulanan bir doğrudan ispat yöntemidir. Burada, mutlak doğruyla doğrudan ispatı iki farklı yöntemle ele alacağız.

8.1 Mutlak Doğruya Eşdeğer Yaparak İspat

Burada vereceğimiz doğrudan ispat yöntemi, ispat edilecek koşulsuz teoremin bir mutlak doğruya eşdeğer olduğunu göstermeye dayanır.

Yöntem 8.1. Teorem 5.1'e göre bir $p \equiv \top$ eşdeğerliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul $p \Leftrightarrow \top$ önermesinin bir karşılıklı koşullu teorem olmasıdır. Bu nedenle, bir p koşulsuz teoremini ispat etmek için

$$p \Leftrightarrow \top$$

karşılıklı koşullu teoreminin ispatı yapılır. Bu ispat, Bölüm 7.3'te

verilen

$$\begin{array}{rlll} p & \Leftrightarrow & p_1, & (G_0) \\ & \Leftrightarrow & p_2, & (G_1) \\ & \vdots & & \\ & \Leftrightarrow & p_n, & (G_{m-1}) \\ & \Leftrightarrow & \top. & (G_m) \end{array} \qquad \text{veya} \qquad \begin{array}{rlll} \top & \Leftrightarrow & q_1, & (H_0) \\ & \Leftrightarrow & q_2, & (H_1) \\ & \vdots & & \\ & \Leftrightarrow & q_n, & (H_{n-1}) \\ & \Leftrightarrow & p. & (H_n) \end{array}$$

çift gerektirme sistemlerinden biriyle yapılır. Burada, $G_0, G_1, ..., G_m$ ve H_0, H_1, ..., H_n sembolleri, ilgili adımların gerekçeleridir.

Bu şekilde, bir koşulsuz teoremin bir mutlak doğruya eşdeğer olduğunun gösterilmesi yöntemine **mutlak doğruya eşdeğer yaparak ispat** denir.

Örnek 8.1. "Her reel sayının çarpımsal tersi kendisine eşittir." koşulsuz teoremi ispatlamak için $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^{-1})^{-1} = x$ önermesinin bir mutlak doğruya eşdeğer olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rlll} (x^{-1})^{-1} = x & \Leftrightarrow & (x^{-1})^{-1}x^{-1} = xx^{-1}, & (x = y \Leftrightarrow xz = yz), \\ & \Leftrightarrow & 1 = 1, & (xx^{-1} = 1), \\ & \Leftrightarrow & \top & \end{array}$$

Örnek 8.2. Bir $f : A \to B$ fonksiyonu ve tersi f^{-1} için $(f^{-1})^{-1} = f$ önermesinin bir mutlak doğruya eşdeğer olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rll} (f^{-1})^{-1} = f & \Leftrightarrow & (f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} \\ & \Leftrightarrow & I_B = f \circ f^{-1} \\ & \Leftrightarrow & \top \end{array}$$

Örnek 8.3. "Her küme, evrensel kümenin bir alt kümesidir." koşulsuz teoremi ispatlamak için $\forall A \in E$, $A \subseteq E$ önermesinin bir mutlak doğruya eşdeğer olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rlll} A \subseteq E & \Leftrightarrow & x \in A \Rightarrow x \in E, & (\text{Alt küme tanımı}) \\ & \Leftrightarrow & x \in A \Rightarrow \top, & (x \in E \equiv \top) \\ & \Leftrightarrow & \top. & ((p \Rightarrow \top) \equiv \top) \end{array}$$

Alıştırma 8.1. Aşağıdaki teoremleri bir mutlak doğruya eşdeğer olduğunu göstererek ispatlayınız. c)'de $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$, $2 \leqslant a, b$ olsun.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

b) $\sum_{x=1}^{90} \cos^2 x = \frac{91}{2}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[a]{x^m \sqrt[b]{x^n}} = \sqrt[ab]{x^{mb+n}}$

d) $\forall A \in E$, $A \cap A' = \varnothing$

8.2 MD'den Gerektirme Yaparak İspat

Burada, bir koşulsuz teoremin doğru olduğunu göstermek için bir mutlak doğrunun (MD) onu nasıl gerektirdiğini göstereceğiz. Yönteme geçmeden önce, bu gerektirmenin koşulsuz teoreme eşdeğer olduğunu ispatlayalım.

Teorem 8.1. Her p önermesi için $(\top \Rightarrow p) \equiv p$.

İspat. Eşdeğerlik sistemiyle ispat yapalım.

$$\begin{aligned} \top \Rightarrow p &\equiv \neg\top \vee p, && (p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q) \\ &\equiv \bot \vee p, && (\neg\top \equiv \bot) \\ &\equiv p. && (\bot \vee p \equiv p) \end{aligned}$$

Bu ispat, doğruluk tablosu kullanarak da aşağıdaki gibi yapılabilir.

$\top$	p	$p \Rightarrow \bot$
1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

Yöntem 8.2. Teorem 8.1'e göre p koşulsuz teoremi $\top \Rightarrow p$ koşullu teoremine eşdeğerdir. Bu nedenle, p koşulsuz teoremini ispat etmek için

$$\top \Rightarrow p$$

koşullu teoreminin ispatı yapılır. Bu ispat, Bölüm 7.2.1'de verilen

$$\begin{aligned} \top \;&\Rightarrow\; p_1, \quad (G_0)\\ &\Rightarrow\; p_2, \quad (G_1)\\ &\;\vdots\\ &\Rightarrow\; p_n, \quad (G_{n-1})\\ &\Rightarrow\; p. \quad (G_n) \end{aligned}$$

gerektirme sistemiyle yapılır. Burada, $G_0, G_2, ..., G_n$ sembolleri ilgili adımları doğrulayan tanım, aksiyom ve teorem gibi gerekçelerdir.

Bu şekilde, bir koşulsuz teoremin bir mutlak doğrudan gerektirme yaparak gösterilmesi yöntemine **mutlak doğrudan gerektirmeyle ispat** denir.

Örnek 8.4. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$ için $x|x^y$ koşulsuz teoremini, $x = x$ mutlak doğru önermesinden gerektirmeyle ispatlayalım.

$$\begin{aligned} x = x \;&\Rightarrow\; x^y = x^y, \quad y \in \mathbb{Z},\\ &\Rightarrow\; x^y = xx^{y-1},\\ &\Rightarrow\; x^y = xq,\ \exists q = x^{y-1} \in \mathbb{Z},\\ &\Rightarrow\; x|x^y \qquad (\text{"}|\text{"nin tanımı}). \end{aligned}$$

Örnek 8.5. "Tersinir bir fonksiyonunun tersi kendisidir." koşulsuz teoremini, $f \circ f^{-1} = I$ mutlak doğru önermesinden gerektirmeyle ispatlayalım.

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} = I \;&\Rightarrow\; (f \circ f^{-1}) \circ (f^{-1})^{-1} = I \circ (f^{-1})^{-1},\\ &\Rightarrow\; f \circ (f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1}) = I \circ (f^{-1})^{-1},\\ &\Rightarrow\; f \circ I = (f^{-1})^{-1},\\ &\Rightarrow\; f = (f^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Örnek 8.6. $2^6 \cong 1(mod\,9)$ önermesini, $2 \cong 2(mod\,9)$ mutlak doğru önermesinden gerektirme yaparak ispatlayalım. Kısalık için "$(mod\,m)$" yerine "(m)" yazalım.

$$\begin{array}{rll} 2 \cong 2(9) & \Rightarrow \; 2^2 \cong 4(9), & (x \cong y(m) \Rightarrow x^n \cong y^n(m)) \\ & \Rightarrow \; 2^3 \cong 8(9), & (x \cong y(m) \Rightarrow kx \cong ky(m)) \\ & \Rightarrow \; 2^3 \cong -1(9), & (8 \cong -1(9)) \\ & \Rightarrow \; (2^3)^2 \cong (-1)^2(9), & (x \cong y(m) \Rightarrow x^n \cong y^n(m)) \\ & \Rightarrow \; 2^6 \cong 1(9). & \end{array}$$

Alıştırma 8.2. Aşağıdaki teoremleri bir mutlak doğrudan gerektirmeyle ispatlayınız.

a) $2^{153} \cong 8(mod\,9)$

c) $f : A \to B$, $(f^{-1})^{-1} = f$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $xx^{-1} = 1$

d) $\forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0$, $x|(x^2 - x)$

Not 8.1. Mutlak doğrudan gerektirme yapmak, mutlak doğruya eşdeğer yapmanın bir sonucudur; fakat tersi doğru değildir. Çünkü; $p \Leftrightarrow \top$ önermesi doğru ise $p \Rightarrow \top$ önermesi doğrudur; fakat $p \Rightarrow \top$ önermesi doğru ise $p \Leftrightarrow \top$ önermesi doğru değildir. Bu nedenle, Teorem 8.1'de verilen her p önermesi için

$$p \equiv (\top \Rightarrow p)$$

eşdeğerliğinden dolayı bir p koşulsuz teoreminin ispatı bir $\top$ mutlak doğrusunun p için gerekli olduğu gösterilerek yapılıyor. Fakat, aynı ispat, bir p önermesinin $\top$ mutlak doğrusunu gerektirdiğini göstererek (8.1) şeklindeki bir gerektirme sistemiyle yapılamaz. Çünkü, bir p koşulsuz teoremi için

$$\begin{array}{rlll} p & \Rightarrow & p_1, & (G_0) \\ & \Rightarrow & p_2, & (G_1) \\ & \vdots & & \\ & \Rightarrow & p_n, & (G_{n-1}) \\ & \Rightarrow & \top. & (G_n) \end{array} \qquad \boxed{\textbf{YANLIŞ}} \qquad (8.1)$$

yazılan bir gerektirme sistemi, $p \Rightarrow \top$ önermesini verir; fakat

$$p \not\equiv (p \Rightarrow \top)$$

olduğu için bu ispat p koşulsuz teoreminin bir ispatı değildir. Gerektirme sistemindeki $G_0, G_1, ..., G_n$ sembolleri, ilgili adımları doğrulayan gerekçelerdir.

Burada, (8.1) gerektirme sisteminin YANLIŞ olduğunu aksine bir örnek vererek de gösterebiliriz. Bunun için $3 = 2$ yanlış önermesinden (8.1) gerektirme sistemiyle aşağıdaki gibi bir mutlak doğru elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} 3 = 2 \quad &\Rightarrow \quad 3 = 2, 2 = 3, \quad &(x = y \Rightarrow y = x) \\ &\Rightarrow \quad 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3, \quad &(x = y, z = w \Rightarrow yz = yw) \\ &\Rightarrow \quad 6 = 6, \\ &\Rightarrow \quad \top. \quad &((6 = 6) \equiv \top) \end{aligned}$$

—○— [1]

[1] *Daha iyisi için önerinizi yazara (**naim.cagman@gop.edu.tr**) gönderiniz.*

Bölüm 11

Çelişkiyle İspatlar

Şeytan da doğru yolu gösterir,
söylediğinin tersini yaparsan.
Naim Çağman

Bu bölümde, doğruluğu doğrudan ispat edilmesi zor olan önermeler için acaba yanlış olsaydı ne olurdu sorusunun cevabından ortaya çıkan olmayana ergi, başka bir adıyla çelişkiyle ispat yöntemini göreceğiz.

Çelişkiyle ispat, genellikle koşulsuz teoremlerin ispatında kullanılan bir dolaylı ispat yöntemidir. Gerektiğinde koşullu ve karşılıklı koşullu teoremlerin ispatında da kullanılan çelişkiyle ispat, bir önermenin doğru olduğunu göstermek yerine yanlış olamayacağı gösterilir. Bu ispat, Aristo mantığının üç temel ilkesinden "üçüncü şıkkın imkansızlığı ilkesine"[1] dayanır. Bu ilkeye göre, bir önerme ya doğru ya da yanlıştır, üçüncü bir alternatifi yoktur. Bundan dolayı, bir önermenin yanlış olması bir çelişkiye neden oluyorsa üçüncü şıkkın imkansızlığı ilkesine göre kendisi doğru olmak zorundadır.

Alıştırma 11.1. Aristo mantığın üç temel ilkesini yazınız.

[1]principle of excluded middle

Tanım 11.1. Bir önermenin doğru olduğunu göstermek yerine, değilinin bir çelişkiyi gerektirdiğini göstererek, önermenin yanlış olamayacağının ispat edilmesi yöntemine **çelişkiyle ispat**[2] veya **olmayana ergi**[3] denir.

Çelişkiyle ispat, her ne kadar koşulsuz teoremlerin ispatlarında kullanılan bir yöntem olsa da burada, her teorem türüne uygulanacağını göstereceğiz.

11.1 Koşulsuz Teoremlerin Çelişkiyle İspatı

Burada, çelişkiyle ispatın bir matematiksel ispat olduğunu gösterdikten sonra teoremlerin ispatında nasıl kullanıldığını vereceğiz.

Çelişkiyle ispat, önermelerin değiline bağlı olduğu için önce sık kullanılan bazı önermelerin değilinin nasıl yazıldığını gösterelim. Bir önermenin değilini yazmak tamamen önermenin tanımlandığı bağıntıya bağlıdır.

Örnek 11.1. Aşağıda uygun kümeler üzerinde tanımlı bağıntılarla yazılmış bazı önermelerin değillerinin ifadeleri verilmiştir.

1) $\neg(x \in A) \Leftrightarrow x \notin A$

2) $\neg(x = y) \Leftrightarrow x \neq y$

3) $\neg(x \leqslant y) \Leftrightarrow y < x$

4) $\neg(A \subseteq B) \Leftrightarrow B \subset A$

Alıştırma 11.2. Uygun kümeler üzerinde tanımlı bağıntılarla ifade edilmiş aşağıdaki önermelerin değillerini değil sembolünü kullanmadan ifade ediniz.

a) $x \cong y (mod\, m)$

b) $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$

c) $x \neq 0,\ x|y$

d) $A \approx B$

e) $x = 1 \Rightarrow x \neq -1$

f) $x \in A \vee x \notin A$

---

[2] proof by contradiction

[3] reductio ad absurdum: Latince saçma olana indirgeme demektir.

Şimdi, bir önermenin değilinin bir çelişkiye neden olduğunu göstermenin, aslında bu önermenin doğru olduğunu göstermek olduğunu ispatlayalım.

Teorem 11.1. (**Olmayan Ergi Teoremi**) Değili çelişki gerektiren her önerme doğrudur.

İspat. Bir p önermesi bir çelişkiyi gerektiriyorsa $\neg p \Rightarrow \bot$ önermesi doğrudur. Burada, $(\neg p \Rightarrow \bot) \equiv p$ eşdeğerliğinin doğru olduğu gösterilirse p önermesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned} \neg p \Rightarrow \bot &\equiv \neg\neg p \vee \bot, && (p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q) \\ &\equiv p \vee \bot, && (\neg\neg p \equiv p) \\ &\equiv p. && (p \vee \bot \equiv p) \end{aligned}$$

Bu ispat, kısaca aşağıdaki gibi doğruluk tablosuyla da yapılabilir.

p	$\neg p$	$\bot$	$\neg p \Rightarrow \bot$
$\boxed{1}$	0	0	$\boxed{1}$
$\boxed{0}$	1	0	$\boxed{0}$

□

Yöntem 11.1. Bir p koşulsuz teoreminin çelişkiyle ispatını yapmak için $\neg p$ önermesinin bir çelişkiyi gerektirdiği gösterilir; yani $\neg p \Rightarrow \bot$ koşullu teoremi ispatlanır. Böylece, olmayana ergi teoremine göre p önermesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

Burada, $\neg p \Rightarrow \bot$ koşullu teoreminin ispatı, Bölüm 7.2'deki gibi

$$\begin{aligned} \neg p &\Rightarrow p_1, && (G_1) \\ &\Rightarrow p_2, && (G_2) \\ &\vdots \\ &\Rightarrow p_n && (G_n) \\ &\Rightarrow \bot. && (p_n \equiv \bot) \end{aligned}$$

şeklinde bir gerektirme sistemiyle doğrudan yapılır. Burada, G_1, G_2, ..., G_n sembolleri, ilgili teoremleri doğrulayan gerekçelerdir.

Örnek 11.2. $1 \leqslant 2$ önermesinin doğru olduğunu çelişkiyle ispat edelim.

$$\begin{aligned} \neg(1 \leqslant 2) &\Rightarrow 1 \nleqslant 2, \\ &\Rightarrow 2 < 1, \\ &\Rightarrow \bot. \qquad (2 < 1 \equiv \bot) \end{aligned}$$

Burada, çelişki elde edildiği için $1 \leqslant 2$ doğru olmak zorundadır.

Örnek 11.3. "Boş küme her kümenin alt kümesidir." teoremini çelişki yöntemiyle ispat edelim. $\forall A \in E$ için $\neg(\varnothing \subseteq A)$ olsun.

$$\begin{aligned} \neg(\varnothing \subseteq A) &\Rightarrow \neg(x \in \varnothing \Rightarrow x \in A), && (\text{Alt küme tanımı}) \\ &\Rightarrow \neg(\bot \Rightarrow x \in A), && ((x \in \varnothing) \equiv \bot) \\ &\Rightarrow \neg(\neg\bot \vee x \in A), && (p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q) \\ &\Rightarrow \neg\neg\bot \wedge \neg(x \in A), && (\text{De Morgan kuralı}) \\ &\Rightarrow \bot \wedge \neg(x \in A), && (\neg\neg p \equiv p) \\ &\Rightarrow \bot. && ((\bot \wedge p) \equiv \bot) \end{aligned}$$

Burada, çelişki elde edildiği için $\varnothing \subseteq A$ doğru olmak zorundadır.

Örnek 11.4. "$\sqrt{2}$ irrasyonel bir sayıdır." teoremini çelişkiyle ispatlayalım. $\sqrt{2}$ rasyonel bir sayı olsun. $\sqrt{2}$ rasyonel ise $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ olacak şekilde $\exists a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ ve $(a, b) = 1$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \tfrac{a}{b} &\Rightarrow 2 = \tfrac{a^2}{b^2}, \\ &\Rightarrow 2b^2 = a^2, \\ &\Rightarrow 2b^2 = (2k)^2, && (a^2 \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow a \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow a = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow 2b^2 = 4k^2, \\ &\Rightarrow b^2 = 2k^2, && (b^2 \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow b \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow b = 2t, \exists t \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow (a, b) \neq 1, && (2k, 2t) \neq 1 \\ &\Rightarrow \bot. && (a, b) = 1 \end{aligned}$$

çelişki elde edildiğinden $\sqrt{2}$ irrasyonel bir sayı olmak zorundadır.

Örnek 11.5. "Asal sayılar kümesi sonsuzdur" teoreminin ispatını çelişki bulma yöntemiyle yapalım. Asal sayılar sonlu olsun ve asal sayıları kümesini $A = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ ile gösterelim. A kümesinin sonlu olamayacağını göstermek için bir çelişki elde edelim.

Burada, $x = p_1p_2...p_n + 1$ bir doğal sayıdır. 1'den büyük her doğal sayının en az bir asal böleni olduğuna göre x doğal sayısının da bir p asal böleni vardır. A, bütün asalları içerdiğinden dolayı $p \in A$ ve dolayısıyla $1 \leqslant i \leqslant n$ için $p = p_i$ olmak zorundadır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} p_i|x &\Rightarrow p_1p_2...p_n + 1 = p_ik, \exists k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow k = \frac{p_1p_2...p_n}{p_i} + \frac{1}{p_i} \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \frac{1}{p_i} \in \mathbb{N}, \quad (p_i|p_1p_2...p_n) \\ &\Rightarrow \bot. \qquad (\frac{1}{p_i} \in \mathbb{N} \equiv \bot) \end{aligned}$$

çelişki elde edildiği için asal sayıların sayısı sonsuz olmak zorundadır.

Alıştırma 11.3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için aşağıdakileri olmayana ergi ispat yöntemiyle gösteriniz.

a) $(x^2)^3 = (x^3)^2$

b) $x|xy, x \neq 0$

c) $x \leqslant x^2 + y^2$

d) $0 \leqslant x^3 \vee x^3 \leqslant 0$

e) $cos^2x + sin^2x = 1$

f) $1 < x, \log_x x = 1$

Alıştırma 11.4. Aşağıdaki önermeler doğru mudur? Çelişki bulma yöntemiyle ispat ediniz.

a) $\sqrt{3}$ irrasyoneldir.

b) Her tek tam sayının karesi tektir.

c) Ardışık üç tam sayının çarpımını 3 böler.

d) İki rasyonel sayı arasında bir rasyonel sayı vardır.

e) İki tek tamsayının kareleri farkı bir tamsayının 4 katıdır.

f) Boştan farklı A ve B kümeleri için $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$.

11.2 Koşullu Teoremlerin Çelişkiyle İspatı

Burada, koşullu teoremlerin çelişkiyle ispatını vereceğiz.

Teorem 11.2. Her p ve q önermeleri için $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$.

İspat. İspatını eşdeğerlik sistemiyle yapalım.

$$\begin{aligned} \neg(p \Rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q), && (p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q) \\ &\equiv \neg\neg p \wedge \neg q, && (\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv p \wedge \neg q. && (\neg\neg p \equiv p) \end{aligned}$$

□

Yöntem 11.2. Bir $p \Rightarrow q$ koşullu koşulsuz teoreminin çelişkiyle ispatını yapmak için $\neg(p \Rightarrow q)$ önermesinin bir çelişkiyi gerektirdiği gösterilir; yani $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow \perp$ koşullu teoremi ispatlanır. Bunun için önce Teorem 11.2'den

$$(p \wedge \neg q) \Rightarrow \perp$$

bir $\wedge$-normal koşullu teoreme dönüştürülür ve ispatı Bölüm 7.2.2'de verilen $\wedge$-normal koşullu teoremlerin ispatı gibi de yapılır. Böylece, olmayana ergi teoremine göre $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluğu gösterilmiş olur.

Burada, $\neg p \Rightarrow \perp$ koşullu teoreminin ispatı, Bölüm 7.2'deki gibi

$$\begin{aligned} p, \neg q &\Rightarrow r_1, && (G_1) \\ &\Rightarrow r_2, && (G_2) \\ &\vdots \\ &\Rightarrow r_n && (G_n) \\ &\Rightarrow \perp. && (p_n \equiv \perp) \end{aligned}$$

şeklinde bir gerektirme sistemiyle doğrudan yapılır. Burada, G_1, G_2, ..., G_n sembolleri, ilgili teoremleri doğrulayan gerekçelerdir.

Bölüm 12

Karşıt Ters İspatlar

Tepede olanlar,
düştüğü kuyuyu ters çevirebilenlerdir.
Naim Çağman

Karşıt ters, koşullu teoremlerin ispatında kullanılan bir dolaylı ispat yöntemidir. Burada, koşullu teoremlerin karşıt ters ispat yöntemiyle yapılışını verdikten sonra gerektiğinde karşılıklı koşullu teoremlere de uygulandığını göstereceğiz ve en sonda koşulsuz teoremlere ilişkin bir açıklama yapacağız.

Tanım 12.1. Her p ve q önermesi için $\neg q \Rightarrow \neg p$ önermesine $p \Rightarrow q$ koşullu teoreminin **karşıt tersi** denir.

Tablo 12.1'de görüldüğü gibi $q \Rightarrow p$ ve $\neg p \Rightarrow \neg q$ önermelerine de sırasıyla $p \Rightarrow q$ koşullu teoreminin **karşıtı** ve **tersi** denir.

Karşıtı	Tersi	Karşıt Tersi
$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$

Tablo 12.1: Koşullu teoremin karşıtı, tersi ve karşıt tersi.

Teorem 12.1. Her koşullu teorem, karşıt tersine eşdeğerdir.

İspat. Burada, her p ve q önermesi için $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg q$ olduğunu eşdeğerlik sistemiyle ispat edelim.

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q &\equiv \neg p \vee q, && (p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q) \\ &\equiv \neg p \vee \neg\neg q, && (\neg\neg q \equiv q) \\ &\equiv \neg\neg q \vee \neg p, && (p \vee q \equiv q \vee p) \\ &\equiv \neg q \Rightarrow \neg p. && (\neg p \vee q \equiv p \Rightarrow q) \end{aligned}$$

□

Tanım 12.2. Bir koşullu teoremin ispatının yerine eşdeğeri olan karşıt tersinin ispatının yapılması yöntemine **karşıt ters ispat**[1] denir.

12.1 Koşullu Teoremlerin Karşıt Tersle İspatı

Burada, doğrudan yapılması zor olan koşullu teoremlerin ispatlarını karşıt tersiyle nasıl yapıldığını göreceğiz.

Yöntem 12.1. Bir $p \Rightarrow q$ koşullu teoreminin karşıt ters ispatını yapmak için eşdeğeri olan $\neg q \Rightarrow \neg p$ önermesinin doğruluğu gösterilir. Bu önermenin doğruluğu genellikle

$$\begin{aligned} \neg q &\Rightarrow q_1, && (G_1) \\ &\Rightarrow q_2, && (G_2) \\ &\vdots \\ &\Rightarrow q_n, && (G_n) \\ &\Rightarrow \neg p. && (G_{n+1}) \end{aligned}$$

gerektirme sistemiyle yapılır. Burada, $G_1, G_2, ..., G_{n+1}$ sembolleri, ilgili adımları doğrulayan tanım, aksiyom veya teorem gibi gerekçelerdir.

[1] proof by contrapositive, proof by contraposition

Alıştırma 12.1. Aşağıda verilen örneklerde, ispatların her adımı yanına yazılması gereken uygun gerekçeleri yazınız.

Örnek 12.1. "$\forall x \in \mathbb{Z}$ için x^2 çift ise x çifttir." önermesinin doğruluğunu karşıt ters yöntemiyle gösterelim. Bunun için

$$x \in 2\mathbb{Z}+1 \Rightarrow x^2 \in 2\mathbb{Z}+1$$

olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
x \in 2\mathbb{Z}+1 \quad &\Rightarrow \quad x = 2t+1,\ \exists t \in \mathbb{Z},\\
&\Rightarrow \quad x^2 = (2t+1)^2,\\
&\Rightarrow \quad x^2 = 4t^2+4t+1,\\
&\Rightarrow \quad x^2 = 2(2t^2+2t)+1,\\
&\Rightarrow \quad x = 2r+1,\ \exists r = (2t^2+2t) \in \mathbb{Z},\\
&\Rightarrow \quad x^2 \in 2\mathbb{Z}+1.
\end{aligned}$$

Örnek 12.2. "$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için xy irrasyonel ise x veya y irrasyoneldir." önermesinin doğruluğunu karşıt ters yöntemiyle gösterelim. Bunun için

$$\neg(x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \Rightarrow \neg(xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$$

olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
\neg(x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \quad &\Rightarrow \quad \neg(x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \wedge \neg(y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}),\\
&\Rightarrow \quad x \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\\
&\Rightarrow \quad x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q},\\
&\Rightarrow \quad xy \in \mathbb{Q},\\
&\Rightarrow \quad xy \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\\
&\Rightarrow \quad \neg(xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}).
\end{aligned}$$

Örnek 12.3. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $9 < x + 2y$ ise $3 < x$ veya $3 < y$ olduğunu karşıt ters yöntemiyle gösterelim. Bunun için

$$\neg(3 < x \vee 3 < y) \Rightarrow \neg(9 < x + 2y)$$

olduğunu ispat edelim.

$$\begin{aligned} \neg(3 < x \vee 3 < y) &\Rightarrow \neg(3 < x) \wedge \neg(3 < y), \\ &\Rightarrow x \leqslant 3 \wedge y \leqslant 3, \\ &\Rightarrow x + 2y \leqslant 3 + 2 \cdot 3, \\ &\Rightarrow x + 2y \leqslant 9, \\ &\Rightarrow \neg(9 < x + 2y). \end{aligned}$$

Örnek 12.4. $\forall m \in \mathbb{Z}, x^2 \neq 3m$ ise $\forall n \in \mathbb{Z}, x \neq 3n$ olduğunu karşıt ters yöntemiyle göstermek için

$$\neg(\forall n \in \mathbb{Z}, x \neq 3n) \Rightarrow \neg(\forall m \in \mathbb{Z}, x^2 \neq 3m)$$

olduğunu ispat edelim.

$$\begin{aligned} \neg(\forall n \in \mathbb{Z}, x \neq 3n) &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, \neg(x \neq 3n), \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, x = 3n, \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, x^2 = 9n^2, \\ &\Rightarrow \exists m = 3n^2 \in \mathbb{Z}, x^2 = 3m, \\ &\Rightarrow \neg(\forall m \in \mathbb{Z}, x^2 \neq 3m) \end{aligned}$$

Örnek 12.5. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$[x + y + z < 3] \Rightarrow [(x < 1) \vee (y < 1) \vee (z < 1)]$$

önermesinin doğruluğunu karşıt ters yöntemiyle gösterelim. Bunun için ispatı istenen teoremin karşıt tersi olan

$$\neg[(x < 1) \vee (y < 1) \vee (z < 1)] \Rightarrow \neg[x + y + z < 3]$$

önermesini ispat edelim.

$$\begin{aligned} &\neg[(x < 1) \vee (y < 1) \vee (z < 1)] \\ \Rightarrow\ &\neg(x < 1) \wedge \neg(y < 1) \wedge \neg(z < 1)] \\ \Rightarrow\ &1 \leqslant x \wedge 1 \leqslant y \wedge 1 \leqslant z \\ \Rightarrow\ &1 + 1 + 1 \leqslant x + y + z \\ \Rightarrow\ &\neg[x + y + z < 3] \end{aligned}$$

Alıştırma 12.2. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki teoremleri önce doğrudan ispat yöntemini kullanarak ve sonra da karşıt ters yöntemiyle ispat ediniz.

a) $3x - 7$ çift ise x tektir.

b) x^2 tek ise x tektir.

c) x^3 tek ise x tektir.

d) xy çift ise x çift veya y çifttir.

e) $2^x - 1$ asal ise x asaldır.

f) $4 \nmid x^2$ ise x tektir.

g) $5 \nmid x^2 \Rightarrow 5 \nmid x$

h) $x \nmid yz \Rightarrow x \nmid y$ ve $x \nmid z$

Alıştırma 12.3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki teoremleri önce doğrudan ispat yöntemini kullanarak ve sonra da karşıt ters yöntemiyle ispat ediniz.

a) $x < y, xz > yz \Rightarrow z < 0$

b) $0 < x < y \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant 0$

c) $x^2 + 3x < 0 \Rightarrow x < 0$

d) $x^2y - xy^2 \leqslant x^3 - y^3 \Rightarrow y \leqslant x$

e) $|x - 3| > 3 \Rightarrow 6x < x^2$

f) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

Not 12.1. $p \Rightarrow q$ koşullu teoremlerinin ispatı yapılırken "karşıt ters" ile "çelişki bulma (olmayana ergi)" yöntemlerinde q sonucunun değili olan $\neg q$ önermesinden başlamasından dolayı, bunlar iki farklı dolaylı ispat yöntemi olmalarına rağmen genellikle öğrenciler tarafında birbirine karıştırılır.

Çelişkiyle İspat	Karşıt Ters İspat
$\neg q \Rightarrow \perp$	$\neg q \Rightarrow \neg p$

Tablo 12.2: Çelişkiyle ve karşıt ters ispatın karşılaştırılması.

Tablo 12.2'de görüldüğü gibi $p \Rightarrow q$ koşullu teoremlerinin karşıt ters yöntemiyle ispatı yapılırken q sonucunun değili olan $\neg q$ önermesinden gerektirme sistemiyle p koşulunun değili olan $\neg p$ önermesi

elde edilir. Halbuki, $p \Rightarrow q$ koşullu teoremlerinin çelişkiyle ispatı yapılırken q sonucunun değili olan $\neg q$ önermesinden gerektirme sistemiyle bir çelişki elde edilir.

12.2 Karşılıklı Koşullu T. Karşıt Tersle İspatı

Burada, doğrudan yapılması zor olan karşılıklı koşullu teoremlerin (T) ispatlarını karşıt ters ispat yöntemiyle yapılışını göreceğiz.

Teorem 12.2. Her p ve q önermesi için $p \Leftrightarrow q \equiv \neg p \Leftrightarrow \neg q$.

İspat. Eşdeğerlik sistemiyle ispat yapalım.

$$\begin{aligned} p \Leftrightarrow q &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p), && \text{(Teorem 1.6-iv)} \\ &\equiv (\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p), && \text{(Teorem 12.1)} \\ &\equiv \neg p \Leftrightarrow \neg q. && \text{(Teorem 1.6-iv)} \end{aligned}$$

Yöntem 12.2. Bir $p \Leftrightarrow q$ karşılıklı koşullu teoreminin ispatının karşıt ters yöntemiyle yapmak için aşağıdaki (I) veya (II) yollarında biri izlenir.

(I) Teorem 12.2'ye göre bir eşdeğeri olan $\neg p \Leftrightarrow \neg q$ karşılılı koşullu teoreminin Bölüm 7.3'teki gibi çift gerektirmeyle doğrudan ispatı yapılır.

(II) Teorem 1.6-iv'e göre $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ eşdeğeri olmasından dolayı $p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow p$ koşullu teoremlerinin Yöntem 12.1'deki gibi $\neg p \Rightarrow \neg q$ ve $\neg q \Rightarrow \neg p$ koşullu teoremlerinin ispatları yapılır.

Alıştırma 12.4. Aşağıda verilen örneklerde, ispatların her adımı yanına yazılması gereken uygun gerekçeleri yazınız.

Örnek 12.6. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için $x \nleqslant y \Leftrightarrow x + y \nleqslant y + z$ olduğunu karşıt ters yönteminden (I) yolunu kullanarak

$$\neg(x \nleqslant y) \Leftrightarrow \neg(x + z \nleqslant y + z)$$

olduğunu ispat edelim.

$$\begin{aligned}
\neg(x \nleqslant y) &\Leftrightarrow x \leqslant y, \\
&\Leftrightarrow y = x + k, \exists k \in \mathbb{Z}, \\
&\Leftrightarrow y + z = (x + k) + z, \\
&\Leftrightarrow y + z = (x + z) + k, \exists k \in \mathbb{Z}, \\
&\Leftrightarrow x + z \leqslant y + z, \\
&\Leftrightarrow \neg(x + z \nleqslant y + z).
\end{aligned}$$

Örnek 12.7. İki tamsayının çarpımının tek olması için gerek ve yeter koşul her birinin ayrı ayrı tek olmasıdır. Burada, $x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$xy \in 2\mathbb{Z} + 1 \Leftrightarrow x, y \in 2\mathbb{Z} + 1$$

karşılıklı koşullu teoremi karşıt ters yönteminden (II) ile ispatını yapalım.

$$\begin{aligned}
\neg(xy \in 2\mathbb{Z} + 1) &\Rightarrow xy \notin 2\mathbb{Z} + 1, \\
&\Rightarrow xy \in 2\mathbb{Z}, \\
&\Rightarrow 2|x \vee 2|y, \\
&\Rightarrow \neg(2 \nmid x \wedge 2 \nmid y), \\
&\Rightarrow \neg(x \in 2\mathbb{Z} + 1 \wedge y \in 2\mathbb{Z} + 1), \\
&\Rightarrow \neg(x, y \in 2\mathbb{Z} + 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\neg(x, y \in 2\mathbb{Z} + 1) &\Rightarrow \neg(x \in 2\mathbb{Z} + 1 \wedge y \in 2\mathbb{Z} + 1) \\
&\Rightarrow \neg(x \in 2\mathbb{Z} + 1) \vee \neg(y \in 2\mathbb{Z} + 1) \\
&\Rightarrow x \notin 2\mathbb{Z} + 1 \vee y \notin 2\mathbb{Z} + 1) \\
&\Rightarrow x \in 2\mathbb{Z} \vee y \in 2\mathbb{Z} \\
&\Rightarrow x = 2n \vee y = 2m, \exists n, n \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow xy = 2n2m, \\
&\Rightarrow xy \in 2\mathbb{Z}, \\
&\Rightarrow \neg(xy \notin 2\mathbb{Z}), \\
&\Rightarrow \neg(xy \in 2\mathbb{Z} + 1).
\end{aligned}$$

Alıştırma 12.5. Örnek 5.9 ve Alıştırma 7.6'da verilen teoremleri karşıt ters yöntemiyle ispatlayınız.

12.3 Koşulsuz T. Karşıt Tersle İspatı

Koşulsuz teoremlerin (T) ispatları karşıt ters ispat yöntemiyle yapılabilir; fakat bu önceden verilen çelişkiyle ispat yöntemidir.

Teorem 8.1'e göre her p önermesi için $p \equiv (\top \Rightarrow p)$ olduğundan bir p normal teoremin ispatını karşıt ters yöntemiyle göstermek için eşdeğeri olan $\top \Rightarrow p$ koşullu teoremini karşıt tersle ispat etmek gerekir.

$\top \Rightarrow p$ teoreminin karşıt ters yöntemiyle ispat edilmesi demek $\neg p \Rightarrow \bot$ demektir. Bu da Bölüm 11.1'de verdiğimiz çelişkiyle ispat yöntemidir. Sonuç olarak, normal teoremlerin karşıt ters ispat yöntemi ile çelişkiyle ispat yöntemi aynıdır. Not 12.1'de vurguladığımız çelişkiyle ispat ile karşıt ters ispatın birbirine karıştırılması buradan kaynaklanmaktadır.

—○— [2]

[2] *Daha iyisi için önerinizi yazara (**naim.cagman@gop.edu.tr**) gönderiniz.*

Bölüm 13

Matematiksel Tümevarım

Her şeyin en mühim noktası, başlangıçtır.
Platon (Eflatun)

Matematiksel tümevarım[1] veya kısaca tümevarım, iyi sıralı bir küme üzerinde tanımlı evrensel önermelerin doğru olduğunu göstermek için kullanılan bir ispat yöntemidir. Tümevarımla, doğal sayılarda veya doğal sayıların bir alt kümesi üzerinde, özel durumlardan genel sonuçlar elde edilir.

Tümevarım iyi sıralı kümeler üzerinde tanımlı ise iyi sıralılık nedir? Üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlı her küme, boştan farklı her alt kümesinin en küçük yani minimum elemanı varsa iyi sıralıdır. Doğal sayılar kümesi ve doğal sayılar kümesine denk her küme, "küçük veya eşit" bağıntısına göre iyi sıralıdır. En küçük elemanı n_0 olan doğal sayıların iyi sıralı alt kümeleri

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n_0 \leqslant n\}$$

üzerinde tanımlı

$$\forall n \in A, p(n) \tag{13.1}$$

evrensel önermesinin ispatının tümevarımla yapılışını bu bölümde vereceğiz. $A \subseteq \mathbb{N}$ olduğu için (13.1) önermesi A kümesi kullanılma-

[1] mathematical induction

dan $\mathbb{N}$ kümesiyle

$$\forall n \in \mathbb{N}, n_0 \leqslant n, p(n) \quad \text{veya kısaca} \quad \forall n \geqslant n_0, p(n)$$

şeklinde yazılır. Eğer $n_0 = 0$ ise $A = \mathbb{N}$ olacağı için (13.1) evrensel önermesi

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$$

şeklinde gösterilir. Bu şekildeki evrensel önermelerin tümevarımla ispatına geçmeden önce üzerilen çalışacağımız doğal sayıları tanıyalım.

13.1 Peano Aksiyomları

Doğal sayıları, aksiyomatik olarak burada vereceğimiz manada ilk olarak Alman matematikçi Dedekind (1831-1916) inşa etmiş, bu çalışmayı İtalyan matematikçi Peano (1858-1932) daha düzenli hale getirmiştir. Doğal sayıları aksiyomlaştıran, von Neumann (1903-1957), Zermelo (1871-1953) ve Fraenkel (1860-1925) gibi matematikçilerin verdiği başka sistemlerde vardır. Burada, matematiğin temel taşı olan doğal sayıları ve doğal sayılar kümesini tanımını Peano aksiyomlarıyla vereceğiz.

Peano Aksiyomları[2] (PA):

(PA1) Sıfır bir doğal sayıdır ve "0" sembolü ile gösterilir.

(PA2) Her x doğal sayının sonrası vardır ve "$s(x)$" ile gösterilir.

(PA3) Sıfır hiç bir doğal sayının ardılı değildir. Yani, $s(x) \neq 0$.

(PA4) Her doğal sayının ardılı tektir. Yani, $x \neq y \Rightarrow s(x) \neq s(y)$.

(PA5) Sıfırı içeren ve her doğal sayının sonrasını da içeren her küme, $\mathbb{N}$ sembolüyle gösterilen doğal sayılar kümesine eşittir. Yani, $0 \in M$ ve $x \in M \Rightarrow s(x) \in M$ ise $M = \mathbb{N}$.

[2]Peano's postulates

Tanım 13.1. (PA1)'den 0 doğal sayı ise (PA2) ile elde edilen $s(0)$ doğal sayına **bir** denir ve "1" sembolü ile gösterilir.

$s(0)$ doğal sayı ise (PA2) ile elde edilen $s(s(0))$ doğal sayına **iki** denir ve "2" sembolü ile gösterilir.

$s(s(0))$ doğal sayı ise (PA2) ile elde edilen $s(s(s(0)))$ doğal sayına **üç** denir ve "3" sembolü ile gösterilir.

Bu şekilde devam ederek, her elde edilen x doğal sayısında sonrası $s(x)$ doğal sayılar elde ederek ve isimlendirerek

$$M = \{0, 1, 2, ..., x, s(x), ...\}$$

şeklinde küme elde edilir. (PA5) aksiyomundan $M = \mathbb{N}$ çıkar.

Not 13.1. Peano aksiyomlarıyla, doğal sayılar kümesi üzerinde olması gereken bütün işlemler tanımlanır. Bu alt bölümün amacı, doğal sayılar konusunu işlemek olmayıp, bu bölümün esas konusu olan tümevarımın daha anlaşılır olmasına yardımcı olmak için sadece kısaca Peona aksiyomlarından bahsedilmiştir.

13.2 Tümevarım Teoremi

Matematiksel tümevarım yöntemi, tamamen burada vereceğimiz tümevarım teoremine dayalıdır.

Teorem 13.1. (Tümevarım Teoremi)[3] $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir $p(n)$ açık önermesi verilsin. $p(n_0)$ ve $\forall n \geqslant n_0$, $[p(n) \Rightarrow p(n+1)]$ ise $\forall n \geqslant n_0$, $p(n)$ doğrudur.

İspat. İspatın farklı yollardan yapılışını verelim.

I.Yol: Bir $A = \{n \in \mathbb{N} : p(n)\}$ olsun. Koşul olarak verilen $p(n_0)$ önermesi doğru olduğu için $n_0 \in M$ olur.

Şimdi, $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ olduğunu gösterelim. Burada $n \in A$ alınırsa $p(n)$ doğru olur. Teorem 8.1'de verilen her p önermesi için $(\top \Rightarrow p) \equiv p$ eşdeğerliğinden dolayı $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ önermesinden $p(n+1)$ doğru çıkar. Buradan, $n+1 \in A$ olur.

[3] principle of mathematical induction

Bu durumda, (PA5) aksiyomundan dolayı $A = \mathbb{N}$ elde edilir, başka bir ifadeyle $\forall n \in \mathbb{N}, n_0 \leqslant n, p(n)$ önermesi doğrudur.

II.Yol: $\forall n \geqslant n_0$, $p(n)$ açık önermesi yanlış olsun. Bu durumda,

$$\neg(\forall n \geqslant n_0, p(n)) \equiv \exists n \geqslant n_0, \neg p(n)$$

olur. Burada, $n \geqslant n_0$ olmak üzere en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $p(n)$ yanlış olacağından $B = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}$ kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin boştan farklı bir alt kümesidir. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi iyi sıralı olduğu için her alt kümesinin bir en küçük elemanı vardır. B kümesinin en küçük elemanı m ise $\neg p(m)$ doğru ve $\neg p(m-1)$ yanlış olacağında $p(m)$ yanlış ve $p(m-1)$ doğru olur.

Verilen $p(n_0)$ koşulu doğru olduğu için $n_0 \notin B$ olacağından B kümesinin en küçük elemanı n_0 değildir. Bu durumda $n_0 < m$ olacağından $n_0 \leqslant m - 1$ elde edilir.

Verilen $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ koşulu $\forall n \geqslant n_0$ için doğru olduğunda $p(m-1)$ doğru ise $p(m)$ doğru olur. Bu bir çelişkidir. □

13.3 Tümevarımla İspat

Tümevarım teoremi, $p(n_0)$ ve $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ koşullarının doğru olması durumunda $\forall n \geqslant n_0, p(n)$ önermesinin doğruluğunu garanti eder. Bu nedenle burada, tümevarım teoremine dayanarak $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı evrensel önermelerin tümevarım ispatını vereceğiz.

Yöntem 13.1. $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı bir $\forall n \geqslant n_0, p(n)$ evrensel önermesinin tümevarım teoremiyle ispatını yapmak için sırasıyla aşağıdaki (I) ve (II) adımları takip edilir.

(I) Başlangıç Adımı:[4] $n = n_0$ için $p(n_0)$ önermesinin doğruluğunun ispatı yapılır. Bunun için genellikle aşağıdaki yollardan biri izlenir:

1. Yol: Eğer $p(n_0)$ önermesi bir "β" bağıntısıyla $x_0 \beta x_n$ şeklinde verilmişse bu önermenin ispatı Bölüm 7.1'de gösterildiği gibi

[4] base step

β-bağıntısıyla yapılır.

2. Yol: $p(n_0)$ önermesinin doğruluğu Bölüm 8'de verildiği gibi gerektirme veya çift gerektirmeyle bir mutlak doğruya eşdeğer olduğu gösterilir.

(II) Tümevarım Adımı:[5] $n = k$ için $p(k)$ doğru kabul edilerek $p(k+1)$ önermesinin doğruluğu ispatlanır. Bunun için aşağıda yollardan biri izlenir:

1. Yol: Bölüm 7.2.1'de verilen koşullu teoremlerin gerektirmeyle ispatında olduğu gibi $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ koşullu teoreminin ispatı gerektirmeyle yapılır.

2. Yol: Bölüm 7.2.3'te verilen koşullu teoremlerin sonuç bağıntısıyla ispatında olduğu gibi $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ koşullu teoreminin sonucu olan $p(n+1)$ önermesi bir β bağıntısıyla $x\beta y$ önermesiyle ifade edilmiş ise β-bağıntısıyla ispatı yapılır.

Sonuç olarak, (I) ve (II) adımlarında sırasıyla $p(n_0)$ ve $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ önermelerinin doğruluğu gösterilirse tümevarım teoreminden $\forall n \geqslant n_0, p(n)$ önermesi doğruluğu gösterilmiş olur.

Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir evrensel önermesinin bu şekilde tümevarım teoremiyle doğruluğunun gösterilmesi yöntemine **tümevarımla ispat**[6] denir.

Not 13.2. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\forall n \geqslant n_0, p(n)$ evrensel önermesinde $n_0 = 0$ alınırsa evrensel önerme aşağıdaki şeklinde gösterilir.

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$$

Not 13.3. Tümevarım ispat yönteminde, "İspatı yapılacak $p(k)$ önermesi doğru kabul ediliyor ve bu kabule dayanarak $p(k+1)$ önermesinin doğruluğu gösteriliyor. İspat edilmesi gereken $p(k)$ önermesinin doğru kabul edilmesi mantıklı mı?" sorusu akla gelebilir.

[5] induction step
[6] proof by induction

Bu sorunun cevabını tümevarım teoremi veriyor. Buradaki kafa karışıklığı, başlangıç adımının dikkate alınmadığından kaynaklanıyor. Tümevarım adımında, $p(k)$ önermesi doğru kabul edilerek $p(k+1)$ önermesinin doğru olduğu ispatlanır. Burada, doğruluğu ispatlanan $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ koşullu önermesi, Tablo 13.1'de görüldüğü gibi başlangıca taşınırsa doğruluğu kabul edilen $p(k)$ koşulu, doğruluğu ispat edilen $p(n_0)$ önermesinin yerine geçer. Böylece, doğru olsun denilen $p(k)$ doğru bir önerme olur.

	n_0+0	n_0+1	...	k	$k+1$	...
(I):	$p(n_0)$		(II):	$p(k) \Rightarrow p(k+1)$		
	$p(n_0) \Rightarrow p(n_0+1)$			$\hookleftarrow$		

Tablo 13.1: Tümevarım ispat yöntemi çizelgesi.

Örnek 13.1. Bir derneğin tüzüğündeki maddelerden iki tanesi

Madde 1: Kurucu derneğin ilk üyesidir ve üyelik numarası 1 olur.

Madde 2: Üye olacaklar, en son üyenin onayını alacak ve üyelik numarası onaylayanın üyelik numarasının bir fazlası olacak.

biçiminde aksiyom olarak kabul edilmiştir. Buna göre, $\mathbb{N}$ üzerinde bir $p(n)$ açık önermesi "Derneğin n numaralı üyesi onaylıdır." şeklinde tanımlanmış ise "Derneğin her üyesi onaylıdır." önermesini matematiksel olarak ifade eden

$$\forall n \geqslant 1, p(n)$$

evrensel önermesini tümevarımla ispatlayalım.

(I) Başlangıç Adımı: $n = 1$ için 1 numaralı üye derneğin kurucusu olduğundan, üyeliği ve üyelik numarası Madde 1'de aksiyom olarak kabul edildiği için $p(1)$ önermesi doğrudur.

Kaynakça

[1] D. W. Agler, Symbolic Logic: Syntax, Semantics, and Proof, Rowman and Littlefield Publishers, 2013.

[2] M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs From the Book, Springer-Verlag, 2001.

[3] A. Ambrose, M. Lazerowitz, Logic: The Theory of Formal Inference, Dover Publications, 2015.

[4] J. Barwise and J. Echemendy, Language, Proof and Logic, CSLI Publications, 2002

[5] G. Birkhoff, On the structure of abstract algebras, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 31 (1935) 433-454.

[6] R. Bornat, Proof and Disproof in Formal Logic, Oxford Uni. Press, 2005.

[7] N. Çalışkan, Matematik ve Hata, Pan Yayıncılık, 2006.

[8] F. Çallıalp, Soyut Matematik, 2. Baskı, Birsen Yayınevi, 2019.

[9] V. Chandru, J. Hooker, Optimization Methods for Logical Inference, John Wiley and Sons, 1999.

[10] C.C. Chang and H.J. Keisler. Model Theory. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 73. North-Holland, 1990.

[11] I. Chiswell, W.Hodges, Mathematical Logic, Oxford Uni.Press, 2007

[12] D. van Dalen, Logic and Structure, Fourth Edition, Springer, 2004.

[13] J. Franklin, A. Daoud, Proof in Mathematics: An Introduction, Kew Books, 2011.

[14] T. Grünberg, Modern Logic, METU Press, Ankara, 2002.

[15] H. H. Hacısalihoğlu, Z. Özel, A. Sabuncuoğlu, Soyut Matematik, 5. Baskı, Hacısalihoğlu Yayıncılık, 2020.

[16] R. Hammack, Book of Proof, Richard Hammack Publisher, 2013.

[17] S. Hedman, A First Course in Logic, Oxford University Press, 2004.

[18] K. Houston, How to Think Like a Mathematician. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[19] G. Johnson, Argument and Inference: An Introduction to Inductive Logic, The MIT Press; Illustrated edition, 2017.

[20] T. Karaçay, Soyut Matematik, 2. Baskı, Seçkin Yayıncılık, 2016.

[21] D. Kern, Symbolic Logic, 5. Baskı, Lulu.com, 2021.

[22] E. A. Maxwell, Fallacies in Mathematics, Cambridge Uni. Press, 1959.

[23] E. Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, Chapman and Hall, London, 1997.

[24] R. Mishra, Sets, Relations and Functions, Notes4U, 2019.

[25] A. Nesin, Önermeler Mantığı, 4. Baskı, Nesin Yayınevi, 2013.

[26] J. Nolt, D. Rohatyn, A. Varzi, Schaum's Outline of Logic, McGraw Hill Professional, 1988.

[27] G. Polya, How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method, Princeton University Press, 1957.

[28] B. Russell, Introduction to Mathematical Philosophy, George Allen ve Unwin, London, 1919.

[29] V. V. Rybako, Admissibility of Logical Inference Rules, Volume 136, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 1997.

[30] S. M. Srivastava, A Course on Mathematical Logic, Springer, 2008.

[31] A. Stefanowicz, Proofs and Mathematical Reasoning, University of Birmingham, 2014.

[32] D. J. Velleman, How to Prove It, A Structured Approach, Cambridge University Press, 2006.

[33] C. Yıldırım, Mantık, 2. Baskı, Fol Kitap, 2021.

Dizin

Semboller Listesi

$\neg$	Değil mantıksal bağlacı
$\vee$	Veya mantıksal bağlacı
$\wedge$	Ve mantıksal bağlacı
$\rightarrow$	İse mantıksal bağlacı
$\leftrightarrow$	Ancak ve ancak mantıksal bağlacı
$\veebar$	Ya da bağlacı
1	Doğru önermelerin doğruluk değeri
0	Yanlış önermelerin doğruluk değeri
d	Doğruluk değer fonksiyonu
$d(p)$	p önermesinin doğruluk değeri
$p(p_1, p_2, ..., p_n)$	Önerme polinomu
$\top$	Mutlak doğru
$\perp$	Çelişki
$\equiv$	Eşdeğerlik bağıntısı
G_n	n numaralı gerekçe
H_n	n numaralı gerekçe
E	Evren
$p(x)$	Değişkeni x olan açık önerme
$\forall$	Her
$\forall x$	Evrensel niceleyici
$\forall x, p(x)$	Evrensel önerme
$\exists$	En za bir, bazı
$\exists x$	Varlıksal niceleyici
$\exists! x$	Bir tane vardır
$\exists x, p(x)$	Varlıksal önerme

$\square$	İspatın sonu
$\vdash$	Çıkarım sembolü
KÖ	Karşılıklı öncüllü (çıkarım)
$\dashv\vdash$	Karşılıklı çıkarım sembolü
MP	Modus Ponens
MT	Modus Tollens
$\therefore$	O halde
$\leqslant$	Eşitsizlik bağıntısı
$\cong$	Kongrüans bağıntısı
$\mid$	Böler bağıntısı
$\subseteq$	Alt küme bağıntısı
$\Rightarrow$	Gerektirme bağıntısı
KK	Karşılıklı koşullu (teorem)
$\Leftrightarrow$	Çift gerektirme bağıntısı
MD	Mutlak Doğru
$\approx$	Denk (kümeler)
PA	Peano Aksiyomu
PAn	n. Peano Aksiyomu
$s(x)$	x doğal sayısının ardılı

Yazarın Öz Geçmişi



Prof. Dr. Naim Çağman, 1965 yılında Tokat, Reşadiye, Baydarlı köyünde doğdu. Lisansını İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümünde, yüksek lisansını 1996'da Wales Swansea Üniversitesi, Matematik Bölümünde (İngiltere) matematik mantığı alanında, doktorasını 2000'de Leeds Üniversitesi Matematik Bölümünde (İngiltere) ispat teorisi alanında tamamladı

Yazar, 2000 yılından beri Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünde öğretim üyesi olarak çalışmaktadır. Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilim Dalı başkanlığını yapan yazar, Matematik Lojik, İspat Teorisi, Bulanık Mantık, Esnek Kümeler ve Karar Verme Teorileri alanlarında araştırmalar yapmaktadır.

Yazarın çalıştığı alanlarda, SCI ve SCI-Expanded dergilerde yayımlamış 50 civarı ve diğer ulusal-uluslararası dergilerde yayımlanmış 100 civarı araştırma makalesi vardır. Yazar, lisansüstü öğrencileriyle birlikte; Esnek Cebir, Esnek Matris, Esnek Topoloji, Uni-Int Karar Verme Metodu, Zarsız Tavla gibi yeni kavramları matematik dünyasına kazandırmıştır. Yaptığı bu çalışmalar bugün itibariyle toplamda 7539 atıf almış olup h-endeksi 32'dir. Yazar bugüne kadar yaptığı çalışmalarıyla, Stanford Üniversitesi'nin 2023 yılında dünya

çapında yaptığı sıralamaya göre "Dünyanın en etkili bilim insanları" listesine girmiştir.

Yazar; şimdiye kadar çalıştığı alanlarda 21 tane yüksek lisans ve 9 tane doktora olmak üzere toplam 30 tane lisansüstü öğrencisine tez yazdırmıştır.

Yazarın, bu kitapla birlikte, İngilizce yazılmış bir kitabı (N. Çağman, S.S. Wainer, Tiered Arithmetic and its Applications, Lambert Academic Publishing, 2010.) ve bir de İngilizce'den Türkçe'ye çevrilmiş (K.H. Rosen, Ayrık Matematik ve Uygulamaları, Çeviri Ed: Ö. Akın ve M. Özbayoğlu, Palme Yayıncılık. 2015) kitabında bir bölüm çevirisi vardır.

Yazar, 2012 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü adına "Journal of New Results in Science" ve "Gaziosmanpaşa Bilimsel Araştırma Dergisi" dergilerini kurmuş ve bunların 2012-2014 yılları arasında şef editörlüğünü yapmıştır. 2014 yılında kendi adına "Journal of New Theory" dergisini akademik hayata kazandırmış ve halen şef editörlüğünü yapmaktadır. 05.12.2023

Prof. Dr. Naim Çağman hakkındaki diğer bilgiler için aşağıdaki sitelere bakılabilir.

TOGÜ Akdemik Özgeçmiş:

`http://www.gop.edu.tr/AkademikOzgecmis/1440/naim-cagman`

YÖK Akademik:

`https://akademik.yok.gov.tr/AkademikArama/view/viewAuthor.jsp`

Google Akademik:

`https://scholar.google.com.tr/citations?user=XwJxGAEAAAAJ&hl=tr`

MANTIK VE MATEMATİKSEL İSPAT YÖNTEMLERİ

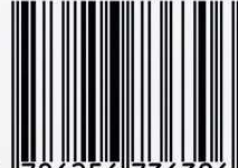
Bu kitap,

Mantık ne işe yarıyor diye soranlara,
Teorem ve ispatları anlamakta zorlananlara,
Alışılmışın dışında ispat yöntemlerini görmek isteyenlere,
İspat ediyorum ama kabul olmuyor diyenlere,
İspata başlamayı ve bitirmeyi bilmeyenlere,
Yaptığı ispatın doğruluğuna karar veremeyenlere,
"Soyut Matematik" dersi alan öğrencilere,
"Ayrık Matematik" dersini alan mühendis adaylarına,
İşi icabı veya sevgisinden dolayı matematikle ilgilenenlere,
Matematiğin sihirli dünyasında gezinmek isteyenlere

hitap etmektedir.



ISBN 978-625-6736-30-6



9 786256 736306 >

MANTIK VE MATEMATİKSEL İSPAT YÖNTEMLERİ

NAİM ÇAĞMAN

